La formula di Riemann-Von Mangoldt

Marcello Colozzo

La (8) del file precedente può essere messa nella forma:

$$\pi(x) = R(x) + G(x) + H(x), \tag{1}$$

dove $H(x)$ è la funzione interessante, in quanto riproduce le discontinuità della distribuzione dei primi. Riesce manifestamente (con ovvio significato dei simboli):

$$H(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mu(k)}{k} f_d\left(x^{1/k}\right), \tag{2}$$

ove la componente discontinua è (vedi file precedente)

$$\begin{aligned} f_d(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \{ &\mathrm{Ei}\left[(\alpha_n + i\beta_n)\ln x\right] + \mathrm{Ei}\left[(1-\alpha_n + i\beta_n)\ln x\right] + \\ &+ \mathrm{Ei}\left[(\alpha_n - i\beta_n)\ln x\right] + \mathrm{Ei}\left[(1-\alpha_n - i\beta_n)\ln x\right] \} \end{aligned} \tag{3}$$

Notation 1 *Non abbiamo assunto l'ipotesi di Riemann, nel senso che* $\alpha_n \in (0,1)$.

Scriviamo

$$H(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} T_{n,\rho_n}(x), \tag{4}$$

essendo

$$T_{n,\rho_n}(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \tau_{k,\rho_n}(x), \tag{5}$$

avendo definito:

$$\begin{aligned} \tau_{k,\rho_n}(x) = &\mathrm{Ei}\left(\frac{\alpha_n + i\beta_n}{k}\ln x\right) + \mathrm{Ei}\left(\frac{1-\alpha_n + i\beta_n}{k}\ln x\right) + \\ &+ \mathrm{Ei}\left(\frac{\alpha_n - i\beta_n}{k}\ln x\right) + \mathrm{Ei}\left(\frac{1-\alpha_n - i\beta_n}{k}\ln x\right) \end{aligned} \tag{6}$$

In altri termini, $\tau_{k,\rho_n}(x)$ è il contributo proveniente dallo zero *n-esimo* o meglio dalla quaterna

$$(\alpha_n + i\beta_n),\ (1-\alpha_n + i\beta_n),\ (\alpha_n - i\beta_n),\ (1-\alpha_n - i\beta_n)$$

Da [5] segue la seguente relazione approssimata:

$$\mathrm{Ei}\left(\frac{s}{k}\ln x\right) \simeq \frac{e^{\frac{s}{k}\ln x}}{\frac{s}{k}\ln x}, \quad s \in \mathbb{C} - \{0\},$$

che ci consente di approssimare la funzione esponenziale integrale nella (6). Ad esempio

$$\mathrm{Ei}\left(\frac{\alpha_n + i\beta_n}{k}\ln x\right) \simeq \frac{x^{\frac{\alpha_n}{k}} e^{i\frac{\beta_n}{k}\ln x}}{\frac{\beta_n}{k}\ln x}$$

Se nel denominatore passiamo alla forma polare

$$\rho_n = |\rho_n| e^{i\arg\rho_n},$$

si ha:

$$\mathrm{Ei}\left(\frac{\alpha_n + i\beta_n}{k}\ln x\right) \sim \frac{kx^{\frac{\alpha_n}{k}}}{\sqrt{\alpha_n^2+\beta_n^2}} e^{i\frac{\beta_n}{k}[\ln x - \arg(\alpha_n + i\beta_n)]}$$

In maniera simile gli altri termini. Quindi, otteniamo la seguente espressione per il contributo proveniente dall'*n-esima* quaterna di zeri simmetrici:

$$\begin{aligned} \tau_{k,\rho_n}(x) \simeq \frac{k}{\ln x}[& \frac{x^{\frac{\alpha_n}{k}}}{\sqrt{\alpha_n^2+\beta_n^2}} e^{i\frac{\beta_n}{k}[\ln x - \arg(\alpha_n + i\beta_n)]} \\ & + \frac{x^{\frac{1-\alpha_n}{k}}}{\sqrt{(1-\alpha_n)^2+\beta_n^2}} e^{i\frac{\beta_n}{k}[\ln x - \arg(1-\alpha_n + i\beta_n)]} \\ & + \frac{x^{\frac{\alpha_n}{k}}}{\sqrt{\alpha_n^2+\beta_n^2}} e^{i\frac{\beta_n}{k}[\ln x - \arg(\alpha_n - i\beta_n)]} \\ & + \frac{x^{\frac{1-\alpha_n}{k}}}{\sqrt{(1-\alpha_n)^2+\beta_n^2}} e^{i\frac{\beta_n}{k}[\ln x - \arg(1-\alpha_n - i\beta_n)]}] \end{aligned} \tag{7}$$

Bibliografia

[1] Newman D.J.: *Analitic number theory,* Springer, 1998.

[2] Vardi I.: *Computational Recreations in Mathematica*, Addison-Wesley, 1991

[3] Gizzetti A.: *Lezioni di Analisi Matematica*, Veschi, 1971

[4] von Mangoldt H.: Zu Riemanns Abhandung “uber die Anzhal der Primzahelen unter einer gegebenen Grösse”, *J. Reine Angew. Math.,* v. 114, 1895.

[5] Riesel R., Göhl G., Some Calculations Related to Riemann’s Prime Number Formula, Matematics of Computations, Vol. 24, N. 112, 1970.

[6] Fichera G., De Vito L.: *Funzioni analitiche di una variabile complessa,* Veschi, 1987.

[7] Edwards H.M., *Riemann’s Zeta Function*, Academic Press, New York, 1974

[8] Riesel H.: *Prime Numbers and Computer Method for Factorization,* Boston, 1985

[9] Wagon S.: *Guida a Mathematica,* McGrawHill,1995.