
Volume del toro

Marcello Colozzo – <http://www.extrabyte.info>

Il formalismo delle matrici di rotazione è estremamente efficace nello studio dei solidi di rotazione. Assegnato il dominio D dato dalla (??), scriviamo una rappresentazione parametrica della sua frontiera:

$$\partial D : x = f(\theta), y = 0, z = g(\theta), \quad \theta \in [a, b], \quad (1)$$

ove f e g sono funzioni continue assegnate del parametro reale θ . Segue che il generico punto di ∂D è rappresentato dal vettore colonna:

$$X(\theta) = \begin{pmatrix} f(\theta) \\ 0 \\ g(\theta) \end{pmatrix}, \quad (2)$$

mentre la matrice di rotazione attorno all'asse z si scrive:

$$\mathcal{R}_z(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Il generico punto della superficie del solido generato dalla rotazione di D attorno all'asse z è rappresentato dal vettore colonna

$$X'(\varphi, \theta) = \mathcal{R}_z(\varphi) X(\theta) = \begin{pmatrix} f(\theta) \cos \varphi \\ f(\theta) \sin \varphi \\ g(\theta) \end{pmatrix}, \quad (4)$$

che fornisce una rappresentazione parametrica della predetta superficie:

$$x = f(\theta) \cos \varphi, y = f(\theta) \sin \varphi, z = g(\theta), \quad \varphi \in [0, 2\pi], \theta \in [a, b] \quad (5)$$

Ad esempio, supponiamo che D sia un dominio circolare centrato in $P_0(x_0, y_0)$:

$$D = \{(x, 0, z) \mid (x - x_0)^2 + (z - z_0)^2 \leq R^2\}$$

In particolare $x_0 > R$, cosicchè D non attraversa l'asse z . Come è noto, la rotazione di D attorno all'asse z genera un *toro*. Le (5) diventano:

$$x = (x_0 + R \cos \theta) \cos \varphi, y = (x_0 + R \cos \theta) \sin \varphi, z = z_0 + R \sin \theta, \quad \varphi \in [0, 2\pi], \theta \in [0, 2\pi] \quad (6)$$

In figura 1 è disegnata la superficie (6)

Applichiamo il teorema di Guldino:

$$V = \text{area}D \cdot 2\pi x_G$$

In questo caso è $x_G = x_0$ e $\text{area}D = \pi R^2$, per cui il volume del toro è:

$$V_{\text{toro}} = 2\pi R^2 x_0$$

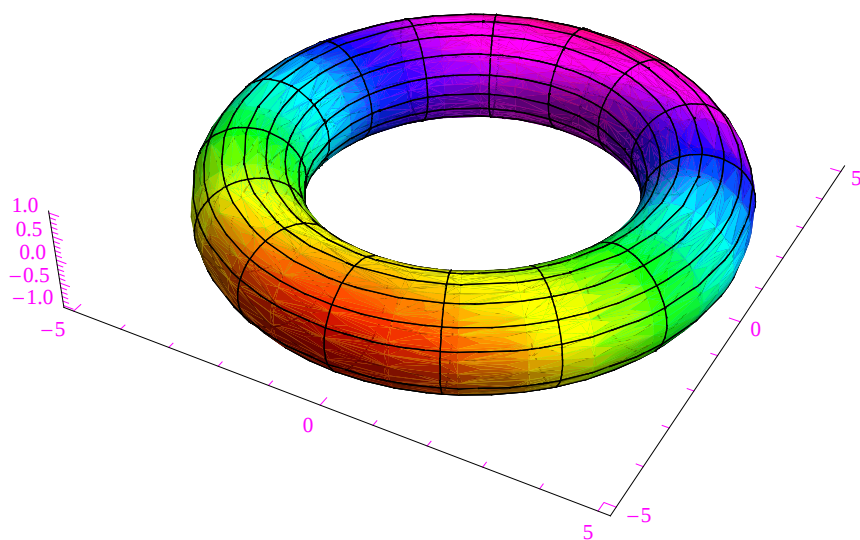


Figura 1: Solido generato dalla rotazione di un dominio circolare di raggio unitario attorno all'asse z