Esercizi sui vettori

Marcello Colozzo

Di seguito alcuni esercizi il cui testo è preso da [1]. La soluzione è nostra.

Esercizio 1 *(Testo tratto dall'esercizio 15, §* ***Esercizi svolti****)*

Trovare la componente del vettore $v = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ *secondo una retta* r *avente direzione e verso del vettore* $\mathbf{w} = -3\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

Soluzione

Dobbiamo eseguire il prodotto scalare tra i due vettori. Se θ è l'angolo tra $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = vw \cos\theta = v_r w,$$

essendo v_r la componente cercata. Quindi

$$v_r = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{w} = \frac{-6 - 3 + 8}{\sqrt{9 + 1 + 4}} = -\frac{1}{\sqrt{14}} \tag{1}$$

Esercizio 2 *(Testo tratto dall'esercizio 16, §* ***Esercizi svolti****)*

Determinare la rappresentazione cartesiana di $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2$*, essendo*

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}, \quad \mathbf{v}_2 = -2\mathbf{i} + 6\mathbf{k}$$

Soluzione

Per un noto teorema:

$$\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -3 & 4 \\ -2 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -18\mathbf{i} - 14\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$$

Esercizio 3 *(Testo tratto dall'esercizio 3, §* ***Esercizi proposti****)*

Determinare λ, μ *in modo che i due vettori di componenti* $(-5, 3, 1)$, $(2, 1 - \lambda, 3\mu)$ *risultino paralleli.*

Soluzione

Poniamo $\mathbf{v} = (-5, 3, 1)$, $\mathbf{w} = (2, 1 - \lambda, 3\mu)$. I vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono paralleli se e solo se sono proporzionali:

$$\exists \alpha \in \mathbb{R} \mid \mathbf{w} = \alpha \mathbf{v}$$

Cioè

$$\begin{cases} 2 = -5\alpha \\ 1 - \lambda = 3\alpha \\ 3\mu = \alpha \end{cases}$$

ovvero un sistema di equazioni lineari che si risolve facilmente. Dalla prima

$$\alpha = -\frac{2}{5},$$

per cui

$$\begin{cases} 1 - \lambda = -\frac{6}{5} \\ 3\mu = -\frac{2}{5} \end{cases},$$

onde

$$\lambda = \frac{11}{5}, \quad \mu = -\frac{2}{15} \tag{2}$$

Esercizio 4 *(Testo tratto dall'esercizio 4, §* ***Esercizi proposti****)*

Determinare λ *in modo che il vettore* $\mathbf{v} = (\lambda, 2-\lambda, \lambda-1)$ *sia complanare con i vettori* $\mathbf{v}_1 = (3,2,1)$, $\mathbf{v}_2 = (-1,2,-1)$.

Soluzione

$$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} \mid \mathbf{v} = \alpha \mathbf{v}_1 + \beta \mathbf{v}_2$$

Cioè

$$\alpha (3,2,1) + \beta (-1,2,-1) = (\lambda, 2-\lambda, \lambda-1)$$

da cui il sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} 3\alpha - \beta - \lambda = 0 \\ 2\alpha + 2\beta + \lambda = 2 \\ -\alpha + \beta + \lambda = 1 \end{cases} \tag{3}$$

nelle incognite (α, β, λ). La matrice incompleta e la matrice completa sono rispettivamente

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2,$$

per cui $\rho(A) = \rho(B)$ i.e. A e B hanno lo stesso rango. Quindi per il teorema di Rouché-Capelli, il sistema è compatibile. Inoltre la caratteristica del sistema è $p = \rho(A) = 3$, per cui il sistema è determinato. Risolvendo con la regola di Cramer:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = +1$$

Cioè

$$\alpha = \frac{1}{2}$$

Passiamo a β:

$$\beta = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

La terza incognita si calcola facilmente:

$$\lambda = 3\alpha - \beta = 2$$

Pertanto il risultato dell'esercizio è

$$\lambda = 2$$

Esercizio 5 *(Testo tratto dall'esercizio 5, §* ***Esercizi proposti****)*

Dopo aver verificato che i vettori

$$\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}, \;\; \mathbf{v}_2 = \mathbf{j} - 3\mathbf{k}, \;\; v_3 = 2\mathbf{i} + \mathbf{k} \tag{4}$$

sono linearmente indipedenti, rappresentare il vettore $\mathbf{v} = (6,1,1)$ *come combinazione lineare dei predetti vettori.*

Soluzione

Deve essere

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \alpha_3 \mathbf{v}_3$$

Cioè

$$\begin{aligned} &\alpha_1 (2,3,0) + \alpha_2 (0,1,-3) + \alpha_3 (2,0,1) = (6,1,1) \\ &\iff \begin{cases} 2\alpha_1 + 0 + 2\alpha_3 = 6 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 + 0 = 1 \\ 0 - 3\alpha_2 + \alpha_3 = 1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \alpha_1 + 0 + \alpha_3 = 3 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 + 0 = 1 \\ 0 - 3\alpha_2 + \alpha_3 = 1 \end{cases}, \end{aligned} \tag{5}$$

che è un sistema di equazioni lineari. Scriviamo le matrici completa e incompleta

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -8$$

Cioè A e B hanno il medesimo rango $\Longrightarrow$ il sistema è compatibile. Tale rango è pari al numero delle incognite $\Longrightarrow$ il sistema è determinato i.e. ammette una ed una soluzione. Come è noto, ciò esprime l'indipendenza lineare del sistema di vettori $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$. Esprimere il vettore $\mathbf{v} = (6,1,1)$ come combinazione lineare del predetto sistema, significa passare dalla base $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ alla base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, onde i coefficienti della combinazione lineare altro non sono che le componenti di $\mathbf{v}$ nella nuova base. Per quanto precede, tali coefficienti è l'unica soluzione del sistema (5) che va risolto con la regola di Cramer.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -1 \Longrightarrow \alpha_1 = \frac{1}{8}$$

Le rimanenti incognite possono essere calcolate con il metodo tradizionale anziché con i determinanti. Invero

$$\alpha_3 = 3 - \alpha_1 = \frac{23}{8}, \ \ \alpha_2 = 1 - 3\alpha_1 = \frac{5}{8}$$

Finalmente

$$\mathbf{v} = \frac{1}{8}\mathbf{v}_1 + \frac{5}{8}\mathbf{v}_2 + \frac{23}{8}\mathbf{v}_3 \tag{6}$$

Bibliografia

[1] Vaccaro G. *Esercizi di Geometria 1*. Veschi, 1978