Estremi relativi della funzione $v(t)$

Marcello Colozzo – http://www.extrabyte.info

Nel numero precedente la funzione $v(t)$ è priva di punti estremali, risultando strettamente crescente. Consideriamo ora il caso in cui $v(t)$ presenta un massimo relativo. Più specificatamente:

$$\exists t_{\max} \in (0,+\infty) \mid t_{\max} \text{ è punto di massimo relativo proprio} \tag{1}$$

Ciò implica:

$$\exists I_\delta(t_{\max}) = (t_{\max}-\delta, t_{\max}+\delta) \mid \begin{cases} v(t) \text{ è strettamente crescente in } (t_{\max}-\delta, t_{\max}) \\ v(t) \text{ è strettamente decrescente in } (t_{\max}, t_{\max}+\delta) \end{cases} \tag{2}$$

La fig. 1 mostra un esempio tipico.

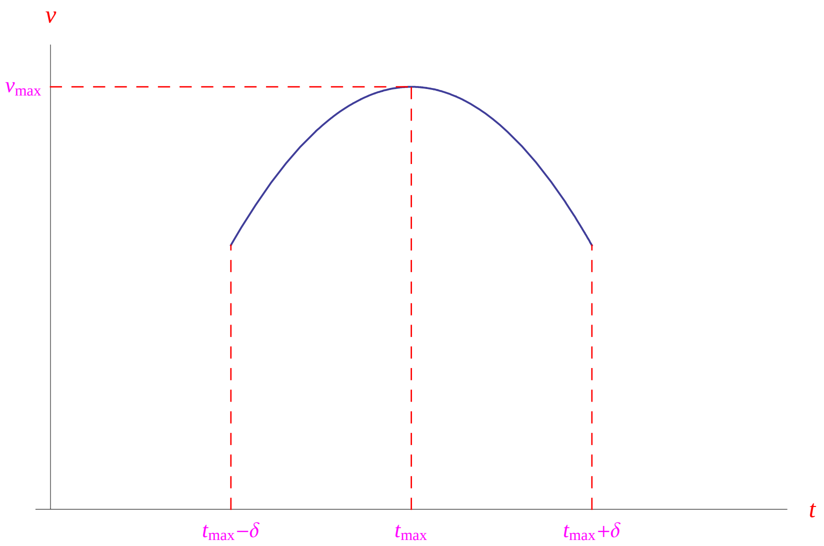

Figura 1: L'istante $t_{\max} \in (0,+\infty)$ è punto di massimo relativo proprio per la funzione $v(t)$.

La monotonia (locale) della funzione $v(t)$ espressa dalla (2) si traduce nel seguente andamento del segno dell'accelerazione $a(t)$, giacchè $a(t) = \frac{d}{dt}v(t)$:

$$\begin{aligned} a(t) &> 0, \ \ \forall t \in (t_{\max}-\delta, t_{\max}) \\ a(t) &< 0, \ \ \forall t \in (t_{\max}, t_{\max}+\delta), \end{aligned}$$

avendosi

$$a(t_{\max}) = 0$$

Cinematicamente, il moto risulta essere accelerato in $(t_{\max}-\delta, t_{\max})$ e ritardato, i.e. decelerato in $(t_{\max}, t_{\max}+\delta)$. Un possibile andamento (locale) della funzione $a(t)$ è riportato in fig. 2. Si noti che non è detto che $a(t)$ sia lineare: il grafico della predetta figura mostra esclusivamente l'andamento qualitativo.

Per quanto riguarda il diagramma orario, dobbiamo tener conto del fatto che il moto è accelerato nell'intervallo di tempo $(t_{\max}-\delta, t_{\max})$, e decelerato in $(t_{\max}, t_{\max}+\delta)$. Tuttavia l'informazione più importante proviene dal segno (locale) della funzione $v(t)$:

$$v(t) = \frac{d}{dt}x(t) > 0, \ \ \forall t \in I_\delta(t_{\max}) = (t_{\max}-\delta, t_{\max}+\delta),$$

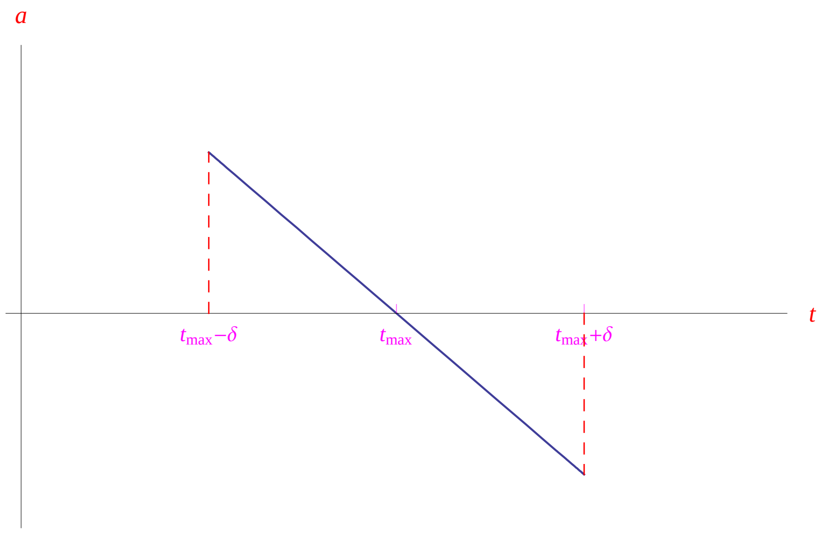

Figura 2: Possibile andamento (locale) della funzione $a(t)$ che esprime l'accelerazione in funzione del tempo, corrispondente a una velocità del tipo di fig. 1 .

per cui $x(t)$ è strettamente crescente in $I_\delta(t)$.Inoltre

$$\begin{cases} a(t) = \frac{d^2}{dt^2}x(t) \\ a(t_{\max}) = 0 \end{cases}, \tag{3}$$

onde $t_{\max}$ è un punto di flesso per il diagramma orario. Più precisamente, un punto di flesso a tangente obliqua (ascendente), giacchè

$$v(t_{\max}) = \frac{d}{dt}x(t)\bigg|_{t=t_{\max}} > 0 \tag{4}$$

Un possibile andamento è illustrato in fig. 3.

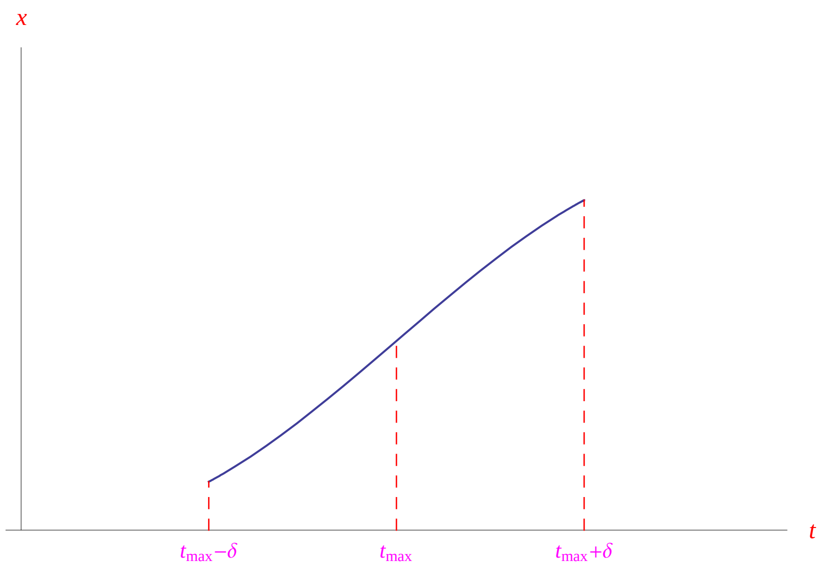

Figura 3: Possibile andamento (locale) del diagramma orario corrispondente a una velocità del tipo di fig. 1 .

Osservazione 1 *Abbiamo considerato il caso di $v(t)$ dotata di un punto di massimo relativo proprio in $t_{\max}$. Tuttavia, come è noto dal Calcolo, esistono punti di estremo relativo in senso improprio. Nel caso di un massimo relativo improprio, si ha:*

$$\exists I_\delta(t) \mid t \in I_\delta(t) - \{t_{\max}\} \Longrightarrow v(t) \leq v(t_{\max}) \tag{5}$$

Ciò si verifica ad esempio, se il grafico della funzione ha un andamento oscillante in ogni intorno di $t_{\max}$.