Velocità areolare

Marcello Colozzo http://extrabyte.infohttp://extrabyte.info

Un qualunque moto piano è caratterizzato oltre che dalle grandezze cinematiche precedentemente definite, dalla cosiddetta *velocità areolare*, che svolge un ruolo essenziale in una particolare calsse di moti denominati *moti centrali*, per i quali il vettore accelerazione è costantemente orientato verso un punto assegnato del piano dove si svolge il moto. Nella dinamica del punto materiale, vedremo che tali moti conservano la velocità areolare, e ciò riguarda in particolare il moto dei pianeti e dei satelliti (seconda legge di Keplero).

Ciò premesso, consideriamo un generico moto piano rispetto a un riferimento polare di polo O e di asse polare coincidente con l'asse x di un riferimento cartesiano $R(Oxyz)$, come illustrato in fig. 1.

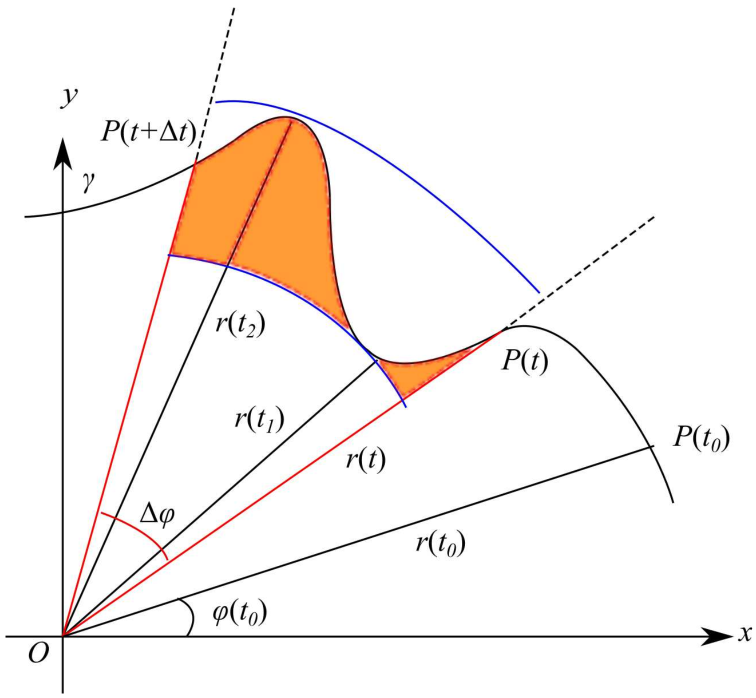

Figura 1: Traiettoria di una particella che si muove nel piano cartesiano (Oxy) in cui è stato istituito un riferimento polare con polo in O, e asse polare x.

Sia $P(t_0)$ la posizione della particella nell'istante iniziale t_0. Come vediamo dalla predetta figura, tale punto ha coordinate polari $r_0 = r(t_0)$, $\varphi_0 = \varphi(t_0)$, quali valori assunti dalle funzioni $r(t), \varphi(t)$ che definiscono le equazioni orarie e quindi, una rappresentazione parametrica della traiettoria γ:

$$\gamma : r = r(t), \ \varphi = \varphi(t), \quad t \geq t_0 \tag{1}$$

Rammentiamo che la rappresentazione polare della velocità vettoriale è

$$\mathbf{v} = v_r \mathbf{e}_r + v_\varphi \mathbf{e}_\varphi,$$

dove v_r, v_φ sono rispettivamente la velocità radiale e la velocità trasversale, mentre $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi$ sono i versori radiale e trasversale, dati in funzione dei versori degli assi cartesiani dalle seguenti relazioni

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= \mathbf{i}\cos\varphi + \mathbf{j}\sin\varphi \\ \mathbf{e}_\varphi &= -\mathbf{i}\sin\varphi + \mathbf{j}\cos\varphi \end{aligned} \tag{2}$$

In generale, a partire da t_0 il raggio vettore $r(t)$ *spazza* un'area che possiamo identificare con una funzione $A(t)$. Per convenzione, $A(t) > 0$ $[A(t) < 0]$ se l'area è spazzata nel verso delle φ crescenti [decrescenti]. Per una funzione $\varphi(t)$ monotona a tratti, decomponiamo l'intervallo $[t_0, t]$ in un numero finito di intervalli in ciascuno dei quali la relativa restrizione di $\varphi(t)$ è monotona. Cioè

$$[t_0, t] = [t_0, \tau_1] \cup [\tau_1, \tau_2] \cup ... \cup [\tau_{n-1}, t]$$

Definiamo

$$A(t) = A_1(\tau_1) + A_2(\tau_2) + ... + A_{n-1}(\tau_{n-1}) + A_n(t)$$

Con

$$A_k(\tau_k) > 0 \ \ [<0] \text{ se } \varphi(t) \text{ è crescente [decrescente] in } [\tau_{k-1}, \tau_k]$$

Osservazione 1 *Dal segno di $A(t)$ vediamo che tale funzione è legata alla derivata di $\varphi(t)$.*

Per un assegnato incremento Δt consideriamo l'intervallo di tempo $[t, t + \Delta t]$ come in fig. 1.

Definizione 2 *Dicesi* **velocità areolare media** *del punto P rispetto al centro O, il rapporto incrementale della funzione $A(t)$:*

$$\frac{A(t+\Delta t) - A(t)}{\Delta t} \tag{3}$$

Per quanto precede, la regolarità della funzione $A(t)$ è legata alla regolarità delle funzioni $r(t), \varphi(t)$ che noi assumiamo di classe C^1, i.e. continue e dotate di derivata continua, per cui ci aspettiamo la medesima regolarità per la funzione $A(t)$. In altri termini, esiste determinato e funito il limite del rapporto incrementale (3). Tale circostanza suggerisce la seguente definizione:

Definizione 3 *Dicesi* **velocità areolare** *del punto P rispetto al centro O, il limite per $\Delta t \to 0$ del rapporto incrementale (3). Cioè*

$$\dot{A} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{A(t+\Delta t) - A(t)}{\Delta t} \tag{4}$$

Ne consegue che la velocità areolare è la derivata prima della funzione $A(t)$.

Teorema 4

$$\dot{A} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} \tag{5}$$

Dimostrazione. Consideriamo l'intervallo chiuso e limitato $[t, t + \Delta t]$. Per un noto teorema di Analisi, la funzione continua $r(t)$ è ivi dotata di minimo e massimo assoluti. Con ovvio significato dei simboli:

$$\exists t_1, t_2 \in [t, t+\Delta t] \mid r_< = r(t_1), \ r_> = r(t_2),$$

come illustrato in fig. 1, dove nel medesimo intervallo l'area è spazzata nel verso delle φ crescenti. Ne consegue che per quel dato $\Delta\varphi$ è $\Delta A > 0$. Nella stessa figura, l'area colorata è

$$\Delta\sigma = \Delta A - \frac{1}{2} r(t_1)^2 \Delta\varphi, \tag{6}$$

giacché il secondo termine a secondo membro è l'area del settore circolare di centro O e raggio $r(t_1)$. Riesce manifestamente

$$0 \leq \Delta\sigma \leq \Delta S, \tag{7}$$

essendo ΔS l'area del settore di corona circolare di centro O e raggi $r(t_1), r(t_2)$. Cioè

$$\Delta S = \frac{1}{2}\left[r(t_2)^2 - r(t_1)^2\right]\Delta\varphi \tag{8}$$

Dalla (7):

$$0 \leq \frac{\Delta\sigma}{\Delta t} \leq \frac{\Delta S}{\Delta t} \tag{9}$$

Il rapporto $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ è infinitesimo per $\Delta t \to 0$. Infatti:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{1}{2}\lim_{\Delta t\to 0}\left[r(t_2)^2 - r(t_1)^2\right]\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = 0\cdot\dot{\varphi} = 0$$

Tenendo conto della doppia disuguaglianza (9), per il teorema dei carabinieri si ha

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\sigma}{\Delta t} = 0 \tag{10}$$

Quindi

$$\lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{\Delta A}{\Delta t} - \frac{1}{2}r(t_1)^2\Delta\varphi\right] = 0 \Longrightarrow \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{1}{2}\lim_{\Delta t\to 0} r(t_1)^2\Delta\varphi,$$

da cui l'asserto osservando che $\lim_{\Delta t\to 0} r(t_1)^2 = r(t)^2$. ∎

Corollario 5 *La rappresentazione cartesiana della velocità aereolare è*

$$\dot{A} = \frac{1}{2}(x\dot{y} - y\dot{x}) \tag{11}$$

Dimostrazione. La velocità trasversale è

$$v_\varphi = \mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_\varphi = (\dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j})\cdot(-\mathbf{i}\sin\varphi + \mathbf{j}\cos\varphi) = -\dot{x}\sin\varphi + \dot{y}\cos\varphi$$

Ma

$$\sin\varphi = \frac{y}{r}, \ \cos\varphi = \frac{x}{r},$$

per cui

$$v_\varphi = \frac{1}{r}(x\dot{y} - y\dot{x})$$

Segue (tenendo conto della (5)):

$$\dot{A} = \frac{1}{2}r\cdot\underbrace{r\dot{\varphi}}_{v_\varphi} = \frac{1}{2}(x\dot{y} - y\dot{x})$$

Cioè l'asserto. ∎

Concludiamo questo numero osservando che è possibile conferire il carattere vettoriale alla velocità areolare. Infatti, sviluppando il prodotto vettoriale

$$\mathbf{r}\wedge\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & 0 \\ \dot{x} & \dot{y} & 0 \end{vmatrix} = (x\dot{y} - y\dot{x})\,\mathbf{k}$$

per cui

$$\dot{\mathbf{A}} = \frac{1}{2}\mathbf{r}\wedge\mathbf{v}$$

che è manifestamente ortogonale al piano del moto e orientato in moto tale che la terna $\mathbf{r}\mathbf{v}\dot{\mathbf{A}}$ sia levogira.

Riferimenti bibliografici

[1] Stoppelli F. *Appunti di Meccanica razionale* Liguori, settembre 1983.