# Le statistiche quantistiche applicate all'Universo primordiale

Marcello Colozzo http://www.extrabyte.info

Dall'equazione che esprime l'andamento della temperatura dell'universo primordiale, si ha che $T(t \to 0) = +\infty$, poiché è $a(0) = 0$.

Quindi in epoche primordiali ci aspettiamo una temperatura talmente alta da innescare la transizione al regime ultrarelativistico per ciò che riguarda il comportamento cinetico delle particelle che compongono il fluido cosmologico.

Dal punto di vista della teoria quantistica dei campi, si assiste al fenomeno della produzione di coppie particella-antiparticella. Per fissare le idee consideriamo una generica particella $x$ di massa $m_x$; quando la temperatura dell'universo è tale che $k_B T = 2m_x c^2$, il processo di annichilazione-creazione $x\bar{x} \rightleftharpoons \gamma\gamma$, ha un equilibrio spostato verso destra. Per questi valori di temperatura il fluido è costituito da un elevato numero di coppie $x\bar{x}$. Al crescere indefinito della temperatura, si creano coppie di particelle-antiparticelle sempre più massive.

Osserviamo che nella relazione precedente il limite $t \to 0$ costituisce una notazione formale, poiché per $t \le t_P$ (tempo di Planck, $t_P = (\hbar G/c^5)^{\frac{1}{2}} \simeq 5.39 \times 10^{-44}\,\mathrm{s}$ ), la Relatività Generale, "esce" dal suo dominio di validità, poichè gli effetti quanto-gravitazionali in tale intervallo di tempo non sono più trascurabili.Infatti la Relatività Generale è una teoria classica del campo gravitazionale, nel senso che non tiene conto degli effetti quantistici. Allo stato attuale delle conoscenze non esiste una teoria quantistica della gravità che sia logicamente chiusa, perciò quando scriviamo $t \to 0$, intendiamo $t \to t_P$. Oltre al tempo di Planck possiamo definire altre grandezze fisiche correlate ad esso. Osserviamo che l'orizzonte cosmologico a $t = t_P$ è pari a $l_P = ct_P$ che è la *lunghezza di Planck*. Possiamo così definire la *massa di Planck* come la massa dell'universo a $t_P$, pari a $m_p = \rho_P l_P^3 = \rho_P c^3 t_P^3$, essendo $\rho_P$ la densità dell'universo a $t_P$. A questo punto ricordiamo che il tempo di Planck è l'intervallo di tempo durante il quale si hanno fluttuazioni dell'energia dell'ordine di $m_p c^2$, che è l'energia di riposo dell'universo al tempo di Planck. Come è noto, tali fluttuazioni sono una conseguenza della relazione di indeterminazione di Heisenberg del tipo tempo-energia: $\Delta E \Delta t \gtrsim \hbar$. Quindi possiamo porre:

$$\Delta E = \frac{\hbar}{t_P} = m_p c^2,$$

con $m_P = \rho_P c^3 t_P^3$, la densità è

$$\rho_P = \frac{1}{G t_P^2} \Longrightarrow m_P = \frac{1}{G t_P^2} c^3 t_P^3 = \frac{c^3 t_P}{G}$$

che sostituita nella prima ci dà

$$\Delta E = \frac{c^5 t_P}{G},$$

ma $\Delta E \Delta t = \hbar$, con $\Delta t = t_P$, e da ciò ricaviamo il tempo di Planck:

$$t_P = \left(\frac{\hbar G}{c^5}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{1}$$

Possiamo esprimere la lunghezza, la densità e la massa di Planck attraverso le costanti fisiche $G, c, \hbar$:

$$
\begin{aligned}
l_P &= \left(\frac{\hbar G}{c^3}\right)^{\frac{1}{2}} \simeq 1.6 \times 10^{-33}\,\mathrm{cm} \\
\rho_P &= \frac{c^5}{\hbar G^2} \simeq 10^{93}\,\mathrm{g\,cm^{-3}} \\
m_P &= \left(\frac{\hbar c}{G}\right)^{\frac{1}{2}} \simeq 2.5 \times 10^{-5}\,\mathrm{g}
\end{aligned} \tag{2}
$$

Per quanto riguarda l'*energia di Planck* $E_P = m_P c^2$ e la *temperatura di Planck* $T_P = E/k_B$, abbiamo:

$$
\begin{aligned}
E_P &= \left(\frac{\hbar c^5}{G}\right)^{\frac{1}{2}} \simeq 1.2 \times 10^{19}\,\mathrm{GeV} \\
T_P &= \frac{1}{k_B}\left(\frac{\hbar c^5}{G}\right)^{\frac{1}{2}} \simeq 1.4 \times 10^{32}\,\mathrm{K}
\end{aligned} \tag{3}
$$

Quindi, combinando in maniera oppurtuna le tre costanti fondamentali: $\hbar$, $c$ e $G$, si ottiene un sistema assoluto di unità di misura individuato da $l_P$, $t_P$ e $m_P$.

Ciò premesso, in epoche primordiali possiamo schematizzare il fluido cosmologico attraverso un gas perfetto ultrarelativistico in equilibrio termodinamico. Giustificheremo a posteriori, cioè in base ai risultati raggiunti, che tutto ciò è una buona approssimazione. Indichiamo con $N$ il numero totale di particelle e con $T$ la temperatura di equilibrio. Dividendo le particelle del gas nelle due grandi famiglie, i bosoni e i fermioni, $N$ si fattorizza come $N = N_B + N_F$, essendo $N_B$ il numero totale di bosoni e $N_F$ il numero totale di fermioni. A loro volta, queste due grandezze si fattorizzano, poiché dobbiamo tener conto della eventuale presenza di particelle di specie diverse. Precisamente

$$
N_B = \sum_{k \in B} N_{B_k} \tag{4}
$$

Nella (4) $N_{B_k}$ è il numero totale di bosoni di spin $s_k$ e la notazione formale $k \in B$ indica che la sommatoria è estesa a tutti i bosoni del sistema. Ripetendo il ragionamento per i fermioni, si ha:

$$
N_F = \sum_{k \in F} N_{F_k} \tag{5}
$$

L'energia totale del gas si esprime come:

$$
E(T) = E_B(T) + E_F(T) \tag{6}
$$

Per determinare tutte queste grandezze, non dobbiamo fare altro che applicare le formule della meccanica statistica quantistica. Cominciamo col considerare il sistema costituito dai bosoni di spin $s_k$. I bosoni seguono la statistica di Bose-Einstein, quindi:

$$
\overline{n}_{B_k,\varepsilon_i} = \frac{1}{\exp\left(\frac{\varepsilon_i - \mu_k}{k_B T}\right) - 1}, \tag{7}
$$

dove $\overline{n}_{B_k,i}$ è il numero medio di particelle che occupano il livello $\varepsilon_i$. Se indichiamo con $g_{B_k,\varepsilon_i}$ il grado di degenerazione di tale livello, il numero medio di particelle che hanno energia $\varepsilon_i$

è $\overline{n}'_{B_k,\varepsilon_i} = g_{B_k,\varepsilon_i}\overline{n}_{B_k,\varepsilon_i}$. Inoltre, le condizioni termiche sono tali che il potenziale chimico sia una quantità trascurbilmente piccola . Quindi il numero totale di bosoni di spin $s_k$ è:

$$N_{B_k}(T) = \sum_{stati} \frac{1}{\exp\left(\frac{\varepsilon_i}{k_B T}\right) - 1} = \sum_{\varepsilon_i=\varepsilon_0}^{\varepsilon_{\max}} \frac{g_{B_k,\varepsilon_i}}{\exp\left(\frac{\varepsilon_i}{k_B T}\right) - 1} \tag{8}$$

essendo $\varepsilon_0$ è il livello fondamentale di singola particella. Dal momento che riesce $N_{B_k}(T) \gg 1$, ci aspettiamo $\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i \ll 1$, abbiamo cioè uno spettro discreto di una densità tale da poter essere approssimato da uno spettro continuo:

$$\begin{aligned} \varepsilon_i &\longrightarrow \varepsilon \in (\varepsilon_0, \varepsilon_{\max}) \\ g_{B_k,\varepsilon_i} &\longrightarrow g_{B_k}(\varepsilon) \end{aligned}$$

La funzione $g_{B_k}(\varepsilon)$ è la generalizzazione al continuo di $g_{B_k,\varepsilon_i}$. Più precisamente, è la *densità degli stati* ovvero il numero di stati per intervallo unitario di energia. In tal modo la (4) diventa:

$$N_{B_k}(T) = \int_0^{+\infty} \frac{g_{B_k}(\varepsilon)}{\exp\left(\frac{\varepsilon}{k_B T}\right) - 1} d\varepsilon \tag{9}$$

Avendo ridefinito la scala dell'energia in modo da avere $\varepsilon_0 = 0$ e osservando che $g_{B_k}(\varepsilon > \varepsilon_0) = 0$. In maniera analoga l'energia è:

$$E_{B_k}(T) = \int_0^{+\infty} \frac{\varepsilon g_{B_k}(\varepsilon)}{\exp\left(\frac{\varepsilon}{k_B T}\right) - 1} d\varepsilon \tag{10}$$

Per quanto riguarda invece i fermioni, basta sostituire nelle formule precedenti (a denominatore) il segno "+" con il segno "−"; poichè adesso abbiamo la statistica di Fermi-Dirac.

$$\begin{aligned} N_{F_k}(T) &= \int_0^{+\infty} \frac{g_{F_k}(\varepsilon)}{e^{\frac{\varepsilon}{k_B T}} + 1} d\varepsilon \\ E_{F_k}(T) &= \int_0^{+\infty} \frac{\varepsilon g_{F_k}(\varepsilon)}{e^{\frac{\varepsilon}{k_B T}} + 1} d\varepsilon \end{aligned} \tag{11}$$

$g_{F_k}(\varepsilon)$ è la densità degli stati relativi ai fermioni di spin $s_k$. La densità degli stati può essere calcolata passando allo spazio delle fasi di singola particella. Precisamente:

$$g_{B_k}(\varepsilon) = \frac{dG_{B_k}(\varepsilon)}{d\varepsilon}$$

con $G_{B_k}(\varepsilon)$ numero degli stati di singola particella di energia $\leq \varepsilon$

$$G_{B_k}(\varepsilon) = g_{B_{s_k}} \int_{\Sigma(\varepsilon)} d\Gamma$$

dove: $g_{B_{s_k}} = 2s_k + 1$ è il numero di stati di spin (peso statistico); $d\Gamma = d^3 x d^3 p / h^3$ è l'elemento di volume dello spazio delle fasi; $\Sigma(\varepsilon)$ è l'insieme deagli stati microscopici di energia $\leq \varepsilon$.

$$\Sigma(\varepsilon) = \{(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \in \Gamma \mid H(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \leq \varepsilon\}$$

essendo $H(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ l'Hamiltoniana di singola particella. Per ipotesi le particelle sono ultrarelativistiche, quindi: $H(p) = c|\mathbf{p}|$. Ciò premesso, possiamo eseguire l'integrazione sullo spazio delle fasi di singola particella.

$$G_{B_k}(\varepsilon) = \frac{g_{B_{s_k}}}{h^3} V \int_{c|\vec{p}| \leq \varepsilon} d^3 p = \frac{4\pi V g_{B_{s_k}}}{h^3} \int_0^{\varepsilon/c} p^2 dp = \int_0^{\varepsilon/c} \left( \frac{4\pi V g_{B_{s_k}}}{h^3} p^2 \right) dp$$

Segue

$$g_{B_k}(\varepsilon) = \frac{d}{d\varepsilon} \int_0^{\varepsilon/c} \left( \frac{4\pi V g_{B_{s_k}}}{h^3} p^2 \right) dp = \frac{1}{c} \frac{4\pi V g_{B_{s_k}}}{h^3} \left. p^2 \right|_{p=\varepsilon/c}$$

Abbiamo così ottenuto la densità degli stati in funzione dell'impulso:

$$g_{B_k}(p) = \frac{V g_{B_{s_k}}}{2\pi^2 \hbar^3} \frac{p^2}{c} \tag{12}$$

Se nella (10) integriamo sull'impulso anziché sull'energia, si ha:

$$E_{B_k}(T) = \frac{V g_{B_{s_k}} c}{2\pi^2 \hbar^3} \int_0^{+\infty} \frac{p^3}{e^{\frac{cp}{k_B T}} - 1} dp \tag{13}$$

Per calcolare l'integrale eseguiamo il cambio di variabile $p \to x = \frac{cp}{k_B T}$, ottenendo:

$$E_{B_k}(T) = \frac{V g_{B_{s_k}}}{2\pi^2 \hbar^3} \frac{(k_B T)^4}{c^3} I_4,$$

avendo posto

$$I_4 = \int_0^{+\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \Gamma(4) \zeta(4) = \frac{\pi^4}{15},$$

onde

$$E_{B_k}(T) = \frac{V g_{B_{s_k}}}{2\pi^2 \hbar^3} \frac{(k_B T)^4}{c^3} \frac{\pi^4}{15} = \frac{V g_{B_{s_k}}}{2} \left( \frac{k_B^4 \pi^2}{15 \hbar^3 c^3} \right) T^4 \tag{14}$$

Ricordando che $\frac{k_B^4 \pi^2}{15 \hbar^3 c^3} = \sigma$ è la costante del corpo nero, si ha:

$$E_{B_k}(T) = \frac{V g_{B_{s_k}}}{2} \sigma T^4 \tag{15}$$

Sommando su tutti i bosoni del gas

$$E_B(T) = \sum_{k \in B} E_{B_k}(T) = V \frac{\sigma T^4}{2} \sum_{k \in B} g_{B_{s_k}} \tag{16}$$

Se introduciamo il *peso statistico effettivo* per i bosoni dato da

$$g_B = \sum_{k\in B} g_{B_{s_k}},$$

la (16) si riscrive

$$\rho_B(T)\,c^2 = \frac{E_B(T)}{V} = \frac{\sigma T^4}{2} g_B \tag{17}$$

Seguendo un procedimento analogo, possiamo determinare $N_B(T)$. Precisamente:

$$N_{B_k}(T) = \frac{V g_{B_{s_k}}}{2\pi^2\hbar^3}\int\limits_0^{+\infty}\frac{p^2}{e^{\frac{cp}{k_BT}}-1}dp = \frac{V g_{B_{s_k}}}{2\pi^2\hbar^3}\frac{(k_BT)^3}{c^3}I_3,$$

con

$$I_3 = \int\limits_0^{+\infty}\frac{x^2}{e^x-1}dx = \Gamma(3)\,\zeta(3) = 2\zeta(3)$$

Segue

$$N_{B_k}(T) = \frac{V g_{B_{s_k}}}{\pi^2\hbar^3}\frac{(k_BT)^3}{c^3}\zeta(3) \Longrightarrow N_B(T) = \sum_{k\in B} N_{B_k}(T) = g_B\frac{V\zeta(3)}{\pi^2}\left(\frac{k_BT}{\hbar c}\right)^3$$

Abbiamo così determinato la densità del numero di bosoni del gas:

$$n_B(T) = \frac{N_B(T)}{V} = g_B\frac{\zeta(3)}{\pi^2}\left(\frac{k_BT}{\hbar c}\right)^3 \tag{18}$$

Adesso non ci resta che calcolare le medesime grandezze relative ai fermioni. Dalla seconda delle (11):

$$E_{F_k}(T) = \frac{V g_{F_{s_k}} c}{2\pi^2\hbar^3}\int\limits_0^{+\infty}\frac{p^3}{e^{\frac{cp}{k_BT}}+1}dp \tag{19}$$

$g_{F_{s_k}} = 2s_k + 1$ è il peso statistico per le particelle di spin $s_k$. Segue

$$E_{F_k}(T) = \frac{V g_{F_{s_k}}}{2\pi^2\hbar^3}\frac{(k_BT)^4}{c^3}J_4, con J_4 = \int\limits_0^{+\infty}\frac{x^3}{e^x+1}dx;$$

è noto che

$$J_{\alpha>0} = \int\limits_0^{+\infty}\frac{x^{a-1}}{e^x+1}dx = \left(1-2^{1-\alpha}\right)I_\alpha$$

Quindi

$$J_4 = \left(1-2^{1-4}\right)\Gamma(4)\,\zeta(4) = \frac{7}{8}\frac{\pi^4}{15} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow E_{F_k}(T) = \frac{7}{8}\frac{V}{2}g_{F_{s_k}}\left(\frac{k_B^4\pi^2}{15\hbar^3c^3}\right)T^4 \Longrightarrow E_F(T) = \frac{7}{8}V g_F\frac{\sigma T^4}{2}$$

Abbiamo così ottenuto la densità di energia per il sistema di fermioni:

$$\rho_F(T)\,c^2 = \frac{E_F(T)}{V} = \frac{7}{8}\frac{\sigma T^4}{2} g_F \tag{20}$$

$g_F = \sum_{k\in F} g_{F_{s_k}}$ è il peso statistico effettivo per i fermioni. Adesso determiniamo $N_F(T)$.

$$N_{F_k}(T) = \frac{V g_{F_{s_k}}}{2\pi^2\hbar^3}\int_0^{+\infty}\frac{p^2}{e^{\frac{cp}{k_BT}}+1}dp = \frac{V g_{F_{s_k}}}{2\pi^2\hbar^3}\frac{(k_BT)^3}{c^3}J_3$$

con

$$J_3 = \int_0^{+\infty}\frac{x^2}{e^x+1}dx = \left(1-2^{-2}\right)I_3 = \frac{3}{2}\zeta(3)$$

Segue

$$N_{F_k}(T) = \frac{V g_{F_{s_k}}}{\pi^2\hbar^3}\frac{(k_BT)^3}{c^3}\frac{3}{4}\zeta(3) = \frac{3}{4}V g_{F_{s_k}}\frac{\zeta(3)}{\pi^2}\left(\frac{k_BT}{\hbar c}\right)^3$$

Cioè

$$N_F(T) = \sum_{k\in F} N_{F_k}(T) = \frac{3}{4}V g_F\frac{\zeta(3)}{\pi^2}\left(\frac{k_BT}{\hbar c}\right)^3 \tag{21}$$

Dall'ultimo passaggio segue che la densità del numero di fermioni è:

$$n_F(T) = \frac{N_F(T)}{V} = \frac{3}{4}g_F\frac{\zeta(3)}{\pi^2}\left(\frac{k_BT}{\hbar c}\right)^3 \tag{22}$$

Confrontando questa equazione a quella che esprime la densità del numero di bosoni:

$$n_F(T) = \frac{3}{4}\frac{g_F}{g_B}n_B(T) \tag{23}$$

Arrivati a questo punto, siamo in grado di determinare la densità totale di energia del gas. Infatti:

$$\rho(T)\,c^2 = \rho_B(T)\,c^2 + \rho_F(T)\,c^2 = g^*(T)\,\frac{\sigma T^4}{2} \tag{24}$$

$g^*(T) \equiv g_B(T) + \frac{7}{8}g_F(T)$ è il peso statistico effettivo del sistema bosoni+fermioni. Abbiamo evidenziato la dipendenza esplicita dalla temperatura, poiché al variare di $T$ il peso statistico può a sua volta variare, a causa di processi di creazione e annichilazione di particelle. Questi processi dipendono fortemente dalle energie in gioco e quindi dalla temperatura.

Verifichiamo la correttezza delle ipotesi fatte e cioè di equilibrio termodinamico e di interazione trascurabile tra le particelle (gas perfetto). Per verificare la prima dobbiamo confrontare il tempo (medio) di collisione tra le particelle con il tempo di Hubble. In generale il tempo medio di collisione tra le particelle di un gas è

$$\tau_c(T) = \frac{1}{n(T)\,\sigma(T)\,v(T)} \tag{25}$$

Dove $n(T)$ è la densità del numero di particelle, $\sigma(T)$ la sezione d'urto e $v(T)$ la velocità termica delle particelle. Nel nostro caso è $n(T) \simeq g^*(T)\left(\frac{k_BT}{\hbar c}\right)^3$, mentre la velocità è $v(T) \simeq$

$c$, in quanto le particelle compiono un moto ultrarelativistico. La sezione d'urto si esprime come:

$$\sigma(T) = \beta^2 \langle d(T) \rangle^2 \tag{26}$$

Qui $\beta$ è un coefficiente di proporzionalità adimensionale pari a $\approx 1/50$ e $\langle d(T) \rangle$ la distanza media tra le particelle; risulta

$$\langle d(T) \rangle = \frac{1}{[n(T)]^{\frac{1}{3}}} \simeq \frac{\hbar c}{k_B T} \tag{27}$$

Tenendo conto di tutto ciò, si ottiene

$$\tau_c(T) = \frac{1}{g^*(T) \left(\frac{k_B T}{\hbar c}\right)^3 \beta^2 \left(\frac{\hbar c}{k_B T}\right)^2 c}$$

Quindi il tempo di collisione è

$$\tau_c(T) = \frac{\hbar}{g^*(T) \beta^2 k_B T} \tag{28}$$

Il tempo di Hubble è dato da

$$\tau_H(t) = \frac{1}{H(t)} \tag{29}$$

Per il calcolo di $H(t)$ osserviamo che in epoche primordiali ogni modello curvo si comporta come un modello piatto, quindi è $H(t) = \frac{2}{3(1+w)t}$ e dobbiamo ovviamente porre $w = 1/3$, giacché il gas è ultrarelativistico. Quindi la (29) diventa

$$\tau_H(t) = 2t \tag{30}$$

Scriviamo l'equazione che regola l'evoluzione temporale della densità:

$$\rho(t) = \frac{3}{32\pi G t^2} \tag{31}$$

Eliminando la variabile $t$ possiamo esprimere il tempo di Hubble in funzione della temperatura. Infatti

$$\begin{aligned}
\rho(T) c^2 = g^*(T) \frac{\sigma T^4}{2} &\Longrightarrow \frac{3c^2}{32\pi G t^2} = g^*(T) \frac{\sigma T^4}{2} \\
&\Longrightarrow \tau_H(T) = 2t = 2\left(\frac{3c^2}{16\pi G g^*(T) \sigma T^4}\right)^{\frac{1}{2}}, \sigma = \frac{k_B^4 \pi^2}{15\hbar^3 c^3} \\
&\Longrightarrow \tau_H(T) = 2\left(\frac{45 c^5 \hbar^3}{16\pi G g^*(T) k_B^4 \pi^2 T^4}\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Ricordando che la temperatura di Planck è $T_P = \frac{1}{k_B}\left(\frac{\hbar c^5}{G}\right)^{\frac{1}{2}}$, l'equazione precedente diventa:

$$\tau_H(T) = 2\left(\frac{45 \hbar^2 T_P^2}{16\pi^3 g^*(T) k_B^2 T^4}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{32}$$

Abbiamo finalmente ottenuto il tempo di Hubble in epoche primordiali espresso attraverso la temperatura di Planck:

$$\tau_H\left(T\right) = 2\left(\frac{45}{16\pi^3 g^*\left(T\right)}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\hbar T_P}{k_B T^2} \tag{33}$$

Ne consegue

$$\frac{\tau_c\left(T\right)}{\tau_H\left(T\right)} = \frac{2\pi}{3\beta^2}\sqrt{\frac{\pi}{5g^*\left(T\right)}}\frac{T}{T_P} \ll 1 \tag{34}$$

Cioè l'ipotesi dell'equilibrio termodinamico è corretta, poiché le collisioni tra le particelle sono istantanee nella scala dei tempi di espansione dell'universo. Per verificare la correttezza dell'ipotesi di interazione trascurabile tra le particelle (gas perfetto), scriviamo l'energia di simgola particella come $\varepsilon = \varepsilon_{cin} + V$, essendo $V$ l'energia di interazione particella-particella. Stiamo considerando epoche primordiali, per cui ci aspettiamo che le interazioni fondamentali siano unificate ed equivalenti a quelle elettromagnetiche. Assumiamo quindi $V$ sia dello stesso ordine di grandezza di quella che caratterizza l'interazione elettrone-elettrone, la cui energia potenziale è:

$$V\left(r\right) = \frac{e^2}{r} \tag{35}$$

$e$ è la carica dell'elettrone e $r$ la coordinata relativa. Passando al valor medio:

$$\langle V\left(r\right)\rangle = \frac{e^2}{\langle r\rangle} = \frac{e^2}{\hbar c}k_B T$$

Da cui, osservando che $\langle\varepsilon_{cin}\rangle = k_B T$, si ha:

$$\left\langle\frac{\varepsilon_{cin}}{V}\right\rangle = \frac{\hbar c}{e^2} = \frac{1}{\alpha} \simeq 137 \tag{36}$$

Quindi l'energia potenziale di interazione è trascurabile rispetto all'energia cinetica di singola particella.