L'Universo primordiale

Marcello Colozzo http://www.extrabyte.info

1 Introduzione

In una lezione precedente abbiamo visto che le principali informazioni sul comportamento dei modelli di Friedmann sono contenute nell'equazione differenziale:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a_0}\right)^2 = H_0^2\left[\Omega_{0w}\,\left(\frac{a_0}{a}\right)^{1+3w} + (1-\Omega_{0w})\right] \tag{1}$$

Ricordiamo che $\Omega_{0w} = \frac{\rho_{0w}}{\rho_{0cr}}$ dove w è un indice che distingue i modelli a radiazione dominante $(w = 1/3)$ da quelli a materia dominante $(w = 0)$.

In linea di principio, la densità totale dell'universo può essere espressa come somma dei contributi provenienti dalle singole componenti del plasma cosmologico in una data epoca. Quindi:

$$\rho(t) = \sum_k \rho_k(t) \tag{2}$$

Conseguentemente, il parametro di densità si esprime come:

$$\Omega(t) = \sum_k \Omega_k(t) \quad , \quad \text{con} \;\; \Omega_k(t) = \frac{\rho_k(t)}{\rho_{cr}(t)} \tag{3}$$

Se ci riferiamo all'epoca attuale, le (4.1) e (4.2) si scrivono:

$$\begin{aligned}\rho_0 &= \sum_k \rho_{0k} \\ \Omega_0 &= \sum_k \Omega_{0k}\end{aligned} \tag{4}$$

Esplicitiamo i singoli termini.

$$\begin{aligned}\rho_0 &= \rho_{0m} + \rho_{0r} + \rho_{0\nu+...} \\ \Omega_0 &= \Omega_{0m} + \Omega_{0r} + \Omega_{0\nu} + ...\end{aligned} \tag{5}$$

Nelle (5) ρ_{0m} è la densità della materia, ρ_{0r} è la densità della radiazione, mentre $\rho_{0\nu}$ è il contributo proveniente dai neutrini. La presenza di ρ_{0r} si giustifica osservando che il modello standard prevede l'esistenza di una componente radiativa. Più precisamente, l'universo è riempito da una radiazione di corpo nero, detta *radiazione di fondo cosmico* (CBR o CMBR) di lunghezza d'onda $0.1\,\text{cm} \leq \lambda \leq 12\,\text{cm}$ (regione spettrale delle microonde) avente una temperatura $T_{0r} \simeq 2.75\,\text{K}$. In altri termini, l'universo attuale emette come un corpo nero in equilibrio termodinamico alla temperatura T_{0r}.

Come è noto, l'energia emessa nell'unità di tempo (potenza) da un corpo nero in equilibrio alla temperatura T è:

$$E(T) = \sigma_B T^4$$

Dove $\sigma_B = \frac{\pi^2 k_B^4}{60\hbar^3 c^2}$ è la costante di Stefan-Boltzmann ($k_B \simeq 1.38 \times 10^{-16}\,\text{erg}\,\text{K}^{-1}$ è la costante di Boltzmann). La corrispondente densità d'energia è

$$\rho(T)\,c^2 = \sigma T^4$$

La costante σ è legata a σ_B dalla relazione: $\sigma_B = \frac{c}{4}\sigma \Longrightarrow \sigma = \frac{\pi^2 k_B^4}{15\hbar^3 c^3}$. Calcoliamone il valore numerico:

$$\sigma = \frac{\pi^2 \cdot (1.380622 \cdot 10^{-16})^4}{15 \cdot (1.054591 \cdot 10^{-27} \cdot 2.997925 \cdot 10^{10})^3} \simeq 7.56473 \times 10^{-15}\,\mathrm{erg\,cm^{-3}\,K^{-4}}$$

Nel caso della CBR si ha: $\varrho_{0r} = \frac{\sigma T_{0r}^4}{c^2} = \frac{7.56473 \cdot 10^{-15} \cdot (2.75)^4}{(2.997925 \cdot 10^{10})^2} \simeq 4.8137 \times 10^{-34}\,\mathrm{g \cdot cm^{-3}}$ .Osserviamo che dovremmo tener conto del contributo proveniente dai neutrini; in prima approssimazione, trascuriamo la componente neutrinica. Eseguiamo una stima del contributo ρ_{0m} proveniente dalla materia. Evidentemente:

$$\rho_{0m} = \rho_{0cr}\Omega_{0m} \tag{6}$$

I dati osservativi ci dicono che $\Omega_{0m} \backsimeq 0.3$. Per quanto riguarda la densità critica, essa si esprime in funzione del valore attuale della costante di Hubble:

$$\rho_{0cr} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \tag{7}$$

Quindi per poter determinare la densità critica, dobbiamo conoscere il valore di H_0. Quest'ultimo è un dato osservativo molto incerto. Infatti sappiamo che

$$H_0 = 100 h_0 \;\; \mathrm{km} \;\; \mathrm{Mpc^{-1}\,s^{-1}} \tag{8}$$

Qui h_0 è una grandezza adimensionale ($0.4 \leq h_0 \leq 1$) che esprime il grado di incertezza con la quale conosciamo il valore esatto di H_0.

La scelta delle unità di misura che compaiono in (8) deriva dal fatto che la legge di Hubble è espressa dalla relazione $v = H_0 d$. In astronomia le distanze si misurano in parsec (pc) e le velocità in Km/s, per cui restano giustificate le unità di misura che compaiono nella (4.7) (ricordiamo che il parsec è la distanza dalla quale il semiasse maggiore dell'orbita terrestre è visto sotto l'angolo di un secondo d'arco; risulta 1pc = 3.261633 anni luce = $3.08567802 \cdot 10^{18}$ cm). La costante di Hubble in $\mathrm{s^{-1}}$vale:

$$H_0 \simeq 3.24 \times 10^{-18} h_0 \;\; \mathrm{s^{-1}} \tag{9}$$

Sostituendo la (8) nella (7) otteniamo: $\rho_{0cr} \simeq 1.84 \cdot 10^{-29} h_0^2$ g cm^{-3} Per quanto riguarda la densità attuale della materia:

$$\rho_{0m} = \rho_{0cr}\Omega_{0m} \simeq 1.84 \times 10^{-29} h_0^2 \Omega_{0m} \;\; \mathrm{g\,cm^{-3}} \tag{10}$$

La densità totale è

$$\varrho_0 = \varrho_{0m} + \varrho_{0r} \simeq \varrho_{0m} \Longrightarrow \Omega_0 \simeq \Omega_{0m}, \tag{11}$$

essendo $\varrho_{0r} \ll \varrho_{0m}$. A questo punto possiamo determinare il valore numerico di Ω_{0r}:

$$\Omega_{0r} = \frac{\rho_{0r}}{\rho_{0cr}} = \frac{4.8137 \cdot 10^{-34}}{1.84 \cdot 10^{-29} h_0^2} \simeq 2.616\,1 \times 10^{-5} h_0^{-2} \ll \Omega_{0m}$$

Possiamo schematizzare la distribuzione attuale della materia attraverso un gas perfetto di atomi di idrogeno in equilibrio alla temperatura T_{0m}. Quindi l'equazione di stato della materia è:

$$p_{0m} V = N k_B T_{0m} \Longrightarrow p_{0m} = \frac{\rho_{0m}}{m_p} k_B T_{0m}$$

Dove N è il numero totale di particelle e $\frac{N}{V} = n_{0m} = \frac{\varrho_{0m}}{m_p}$ è la densità del numero di particelle, mentre m_p è la massa del protone (nucleo dell'atomo di H). L'equazione di stato della componente radiativa è:

$$p_{0r} = \frac{1}{3}\rho_{0r}c^2$$

Quindi la pressione del fluido materia + radiazione è:

$$p_0 = p_{0m} + p_{0r} = \frac{\rho_{0m}}{m_p}k_B T_{0m} + \frac{1}{3}\rho_{0r}c^2$$

In questa equazione il contributo dominante proviene da $\rho_{0r}c^2$, quindi:

$$p_0 \backsimeq \frac{1}{3}\rho_{0r}c^2 \ll \rho_{0m}c^2 = \varrho_0 c^2$$

Perciò risulta $p_0 \ll \rho_0 c^2$. Ciò equivale a porre $p_0 = w\rho_0 c^2$ con $w = 0$. Quindi l'universo attuale è riempito da un fluido con equazione di stato $p_0 = 0$. Per quanto riguarda la temperatura osserviamo che $T_m(t) \neq T_r(t)$, poiché materia e radiazione sono attualmente disaccoppiate. Quindi nell'epoca attuale, materia e radiazione compongono due sistemi fisici la cui temperatura evolve secondo leggi diverse. Tale disaccoppiamento è dovuto al fatto che l'interazione radiazione-materia ha un tempo caratteristico che è molto maggiore del tempo caratteristico dell'espansione dell'universo. Questa è una proprietà generale, valida per qualunque tipo di interazione. Per fissare le idee, consideriamo un processo che coinvolge due specie diverse di particelle: a, b. Precisamente:

$$a \leftrightarrow b$$

Indichiamo con $\Gamma(t)$ il rate di interazione di tale processo, cioè il numero di interazioni nell'unità di tempo. Il suo reciproco $\tau_c(t) = \Gamma(t)^{-1}$, definisce il tempo caratteristico del processo.

Inoltre:

$$\Gamma(t) = n(t)\,\sigma(t)\,\langle v\rangle\,,$$

essendo: $n(t)$ la densità del numero di particelle interagenti, $\sigma(t)$ la sezione d'urto del processo e $\langle v\rangle$ la velocità media delle particelle collidenti. Il numero di interazioni che si realizzano nella scala dei tempi di espansione dell'Universo, è:

$$N_{int} = \int_t^{t+\tau_H} \Gamma(t')\,dt'$$

dove $\tau_H = H^{-1}$ è il tempo di Hubble. Ritenendo $\Gamma(t)$ approssimativamente costante nell'intervallo di integrazione, l'equazione precedente si scrive:

$$N_{int} \backsimeq \Gamma\tau_H = \frac{\Gamma}{H}$$

È evidente che a e b o meglio, i sistemi fisici composti da tali particelle, raggiungono l'equilibrio termico se $N_{int} \gg 1$, cioè $\Gamma \gg H$, equivalente a $\tau_c \ll \tau_H$.In altri termini, affinchè sia possibile il raggiungimento dell'equilibrio termico, la velocità di espansione deve essere maggiore del rate di interazione. In questo caso i due sistemi interagenti evolvono attraverso una successione di stati caratterizzati da una temperatura istantanea $T(t)$ ben definita (equilibrio quasi-statico). Viceversa per $\Gamma \ll H$, l'espansione dell'Universo impedisce il raggiungimento dell'equilibrio. In tal caso si dice che i sistemi sono *disaccoppiati.*

Un caso speciale è quello di un Universo statico, cioè che non si espande e non si contrae, per il quale $H = 0$, quindi $\tau_H = +\infty$. Pertanto è $\Gamma > H$ per ogni interazione, e ciò garantisce il raggiungimento dell'equilibrio.

Ciò premesso, avendo schematizzato la materia attraverso un gas perfetto di atomi di idrogeno, il tempo caratteristico dell'interazione radiazione-materia è il tempo medio di collisione tra un fotone e un atomo di idrogeno:

$$\tau_c(t) = \frac{1}{n_m(t)\,\sigma_H c} = \frac{m_p}{\rho_m(t)\,\sigma_H c} \tag{12}$$

Qui σ_H è la sezione d'urto fotone-atomo di idrogeno. Se ad esempio consideriamo il processo di assorbimento di un fotone da parte di un atomo di idrogeno, in seguito al quale l'elettrone atomico compie una transizione dal livello a al livello b, la sezione d'urto è:

$$\sigma_H = \sigma_{a\to b} = \frac{4\pi^2\alpha\hbar^2}{m_e^2\omega_{ba}}\left|M_{ba}(\omega_{ba})\right|,$$

dove $M_{ba}(\omega_{ba})$ è un termine che connette lo stato iniziale $|a\rangle$ con lo stato finale $|b\rangle$; α è la costante di struttura fine ($\simeq 1/137$); $\omega_{ba} = (E_b - E_a)/\hbar$Il tempo caratteristico di espansione dell'universo è invece il tempo di Hubble**:**

$$\tau_H(t) = \frac{1}{H(t)} = \frac{a}{\dot a} \tag{13}$$

La condizione di disaccoppiamento è $\tau_c(t_0) > \tau_H(t_0)$, essendo t_0 l'epoca attuale. Possiamo determinare la temperatura della materia in funzione del tempo, imponendo la condizione di adiabaticità dell'espansione del gas di atomi di idrogeno.

$$dU_m = -p_m dV$$

Dove U_m e p_m sono l'energia interna e la pressione del gas rispettivamente. La prima è data da:

$$U_m = \frac{3}{2}Nk_BT_m + \rho_m c^2 a^3 = \frac{3}{2}\frac{\rho_m}{m_p}a^3k_BT_m + \rho_m c^2 a^3 = \left(\frac{3}{2}\frac{\rho_m}{m_p}k_BT_m + \rho_m c^2\right)a^3$$

In questa equazione è $\rho_m = \rho_m(t)$ e $T_m = T_m(t)$. La pressione si ricava dall'equazione di stato dei gas perfetti:

$$p_mV = Nk_BT_m = \frac{\rho_m}{m_p}Vk_BT_m \Longrightarrow p_m = \frac{\rho_m}{m_p}k_BT_m$$

La condizione di adiabacità si scrive:

$$d\left[\left(\frac{3}{2}\frac{\rho_m}{m_p}k_BT_m + \rho_m c^2\right)a^3\right] = -\frac{\rho_m}{m_p}k_BT_m da^3 \tag{14}$$

Alla (14) va accoppiata l'equazione che esprime la legge di conservazione della massa, che chiaramente è:

$$d\left(\rho_m a^3\right) = 0 \tag{15}$$

Tenendo conto di ciò, dalla (14) otteniamo:

$$\frac{3}{2}\frac{k_B}{m_p}d\left(\rho_m T_m a^3\right) = -\frac{\rho_m}{m_p}k_B T_m da^3, \tag{16}$$

la cui soluzione è: $T_m\left(t\right) = \frac{A}{a^2(t)}$, essendo A una costante di integrazione. il valore di A lo possiamo ricavare imponendo la condizione $T\left(t_0\right) = T_{0m}$ che è la temperatura attuale della materia, da cui $A = T_{0m}a_0^2$. Quindi:

$$T_m\left(t\right) = T_{0m}\left(\frac{a_0}{a\left(t\right)}\right)^2 \tag{17}$$

Cioè la temperatura della materia va come $a\left(t\right)^{-2}$. Ovviamente la (17) è valida nell'intervallo di tempo in cui materia e radiazione sono disaccoppiate. Utilizzando il red shift come variabile indipendente:

$$T_m\left(z\right) = T_{0m}\left(1+z\right)^2 \tag{18}$$

In maniera simile possiamo determinare l'andamento della temperatura della radiazione. Risulta:

$$T_r\left(t\right) = T_{0r}\frac{a_0}{a\left(t\right)} = T_{0r}\left(1+z\right) \tag{19}$$

Esprimendo il tempo di collisione fotone-atomo di idrogeno in funzione del red shift:

$$\tau_c\left(z\right) = \frac{1}{K_0\left(1+z\right)^3}, \tag{20}$$

dove $K_0 = \frac{\rho_{0m}\sigma_H c}{m_p}$ è una costante con le dimensioni dell'inverso di un tempo. Se ci riferiamo ad esempio ad un universo piatto, la costante di Hubble in funzione del red shift è data da

$$H\left(z\right) = H_0\left(1+z\right)^{1/n},$$

essendo $n = \frac{2}{3(1+w)}$ l'esponente dell'espansione friedmanniana. Abbiamo i due casi:

$$H\left(z\right) = \begin{cases} H_0\left(1+z\right)^{3/2}, & \text{se } w = 0 \\ H_0\left(1+z\right)^2, & \text{se } w = 1/3 \end{cases} \tag{21}$$

Il rate di interazione Γ in funzione del red shift è:

$$\Gamma\left(z\right) = \Gamma_0\left(1+z\right)^3 \tag{22}$$

Al presente materia e radiazione sono disaccoppiate, pertanto è $\Gamma_0 < H_0$. Tuttavia sia nel caso di una RDE che di una MDE, $\Gamma\left(z\right)$ cresce più velocemente di $H\left(z\right)$. Ciò implica l'esistenza di un z_{dec} tale che per $z > z_{dec}$ è $\Gamma\left(z\right) > H\left(z\right)$. In tale range, materia e radiazione sono disaccoppiate.

$$H\left(z\right) = \Gamma\left(z\right) \Longleftrightarrow H_0\left(1+z\right)^{1/n} = \Gamma_0\left(1+z\right)^3,$$

da cui possiamo determinare il red shift del disaccoppiamento:

$$z_{dec} = \begin{cases} \left(\frac{H_0}{\Gamma_0}\right)^{2/3} - 1, & \text{se } w = 0 \\ \left(\frac{H_0}{\Gamma_0}\right)^{2/3} - 1, & \text{se } w = 1/3 \end{cases} \tag{23}$$

Dai dati osservativi risulta: $z_{dec} = 1000$. L'espressione analitica di t_{dec} è:

$$t_{dec} = \frac{t_0}{(1 + z_{dec})^{1/n}} \tag{24}$$

Poichè è $z_{dec} \gg 1$, risulta $t_{dec} \ll t_0$, cioè t_{dec} è un'epoca primordiale. Ci aspettiamo quindi l'esistenza di un'epoca $t_{rec} \lesssim t_{dec}$ tale che per $t < t_{rec}$, la materia è completamente ionizzata. Tale epoca è nota come *tempo della ricombinazione.*

Come vedremo in seguito, esiste un'altra epoca caratteristica nella storia termica dell'Universo. Si tratta del *tempo dell'equivalenza*,definito dalla condizione $\rho_m(t_{eq}) = \rho_r(t_{eq})$.