Unicità del limite

File scaricato da http://wwwextrabyte.info

In[1]:= `f[x_] := √x`

In[2]:= `δ[ϵ_] := 2 √2 ϵ - ϵ^2`

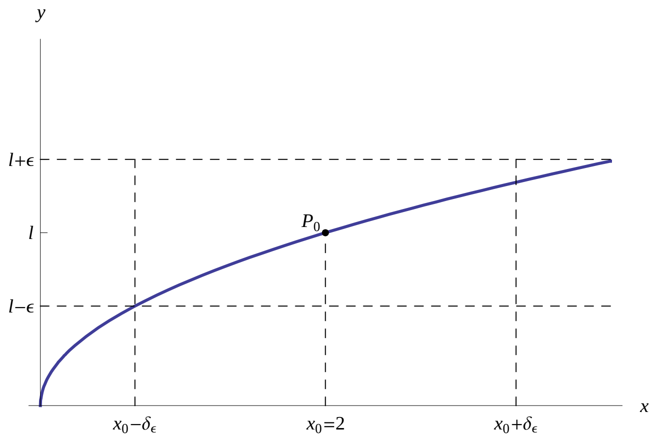
Sappiamo che $\lim_{x \to 2} f(x) = \sqrt{2}$. Infatti:

$\delta(\epsilon) = 2\sqrt{2}\,\epsilon - \epsilon^2 \; = \; > \left(0 < | x - 2 | \; < \delta(\epsilon) \; = \; > \; \left|\sqrt{x} - \sqrt{2}\right| < \epsilon, \;\; \forall \, \epsilon \in \left(0, 2\sqrt{2}\right)\right)$

Ciò è illustrato dal grafico:

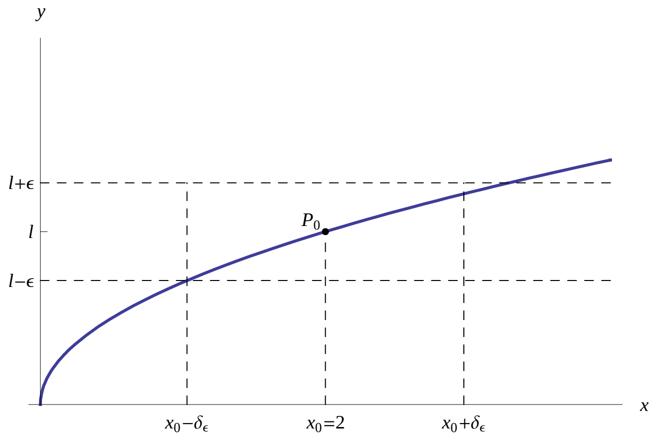
In[3]:=
```
plot[ϵ_] := Plot[
  f[x],
  {x, 0, 4},
  PlotStyle → Thickness[0.005],
  AxesLabel →
   {
    "x", "y"
   },
  Ticks →
   {
    {
     {2 - δ[ϵ], "x0-δϵ"},
     {2 + δ[ϵ], "x0+δϵ"},
     {2, "x0=2"}
    },
    {
     {√2, "l"},
     {√2 + ϵ, "l+ϵ"},
     {√2 - ϵ, "l-ϵ"}
    }
   },
  PlotRange → {0, 3}
  ,
  Epilog →
   {
    {Dashed, Line[{{0, √2 + ϵ}, {4, √2 + ϵ}}]},
    {Dashed, Line[{{0, √2 - ϵ}, {4, √2 - ϵ}}]},
    {Dashed, Line[{{2, 0}, {2, √2}}]},
    {Dashed, Line[{{2 - δ[ϵ], 0}, {2 - δ[ϵ], √2 + ϵ}}]},
    {Dashed, Line[{{2 + δ[ϵ], 0}, {2 + δ[ϵ], √2 + ϵ}}]},
    Text["P0", {2 - 0.1, 0.1 + √2}],
    {
     PointSize[0.012], Point[{2, √2}]
    }
   }
 ]
```

In[4]:= `plot[0.6]`

Out[4]=


Se proviamo a diminuire ϵ vediamo che per $0 < |x - x_0| < \delta_\epsilon$ i punti $(x, f(x))$ cadono comunque nella regione $\mathcal{R}_\epsilon = (x_0 - \delta_\epsilon, x_0 + \delta_\epsilon) \times (l - \epsilon, l + \epsilon)$

In[5]:= `plot[0.4]`

Out[5]=


Supponiamo ora, per assurdo, che $f(x)$ tenda a due limiti distinti. Precisamente: $l = \sqrt{2}$ e $l' = 1$. Deve essere $\left|\sqrt{x} - 1\right| < \epsilon$, cioè $1 - 2\epsilon + \epsilon^2 < x < 1 + 2\epsilon + \epsilon^2$. Quindi poniamo $\delta'_\epsilon = 2\epsilon - \epsilon^2 + 1$ che risulta > 0 se $\epsilon \in \left(0, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$. Segue che $0 < \left|x - 2\right| < \delta'_\epsilon$ non implica $\left|\sqrt{x} - 1\right| < \delta'_\epsilon$. Verifichiamo ciò per via grafica:

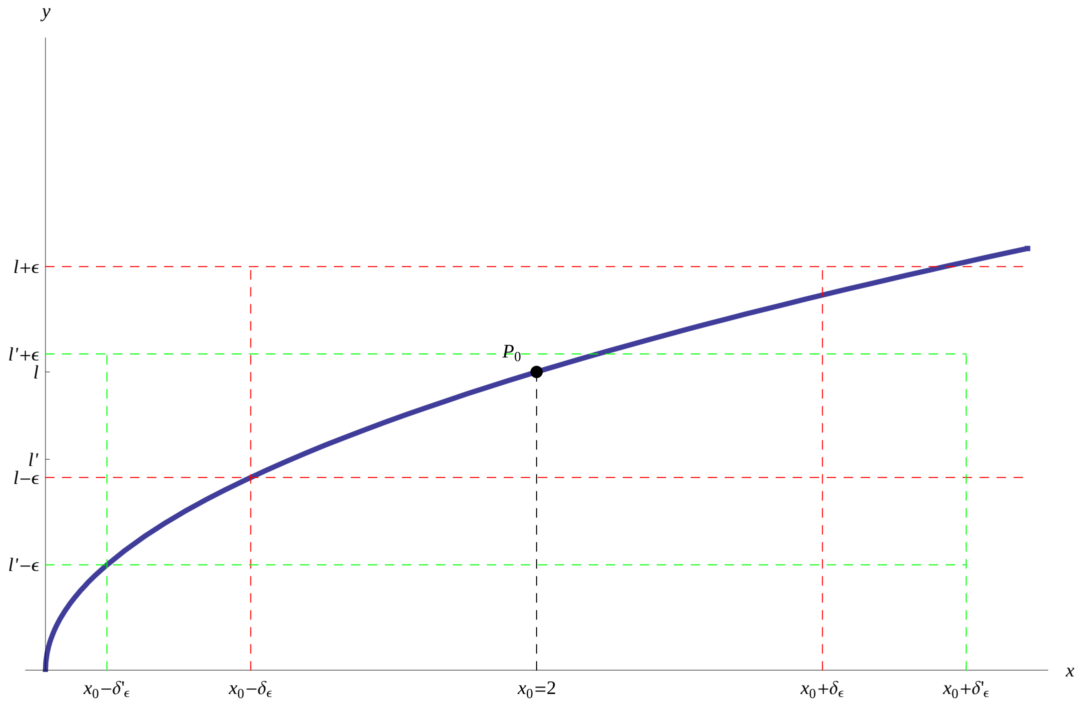
In[6]:=
```
δ1[ϵ_] := 2 ϵ - ϵ^2 + 1
```

In[7]:=
```
plot1[ϵ_] := Plot[
  f[x],
  {x, 0, 4},
  PlotStyle → Thickness[0.005],
  ImageSize →
   {
    500,
    500
   },
  AxesLabel →
   {
    "x", "y"
   },
  Ticks →
```

```
{
 {
  {2 - δ[ϵ], "x0-δϵ"},
  {2 + δ[ϵ], "x0+δϵ"},
  {2, "x0=2"},
  {2 - δ1[ϵ], "x0-δ'ϵ"},
  {2 + δ1[ϵ], "x0+δ'ϵ"}
 },
 {
  {√2, "l"},
  {1, "l'"},
  {√2 + ϵ, "l+ϵ"},
  {√2 - ϵ, "l-ϵ"},
  {1 + ϵ, "l'+ϵ"},
  {1 - ϵ, "l'-ϵ"}
 }
},
PlotRange → {0, 3},
Epilog →
 {
  {Dashed, Line[{{2, 0}, {2, √2}}]},
  {Red, Dashed, Line[{{0, √2 + ϵ}, {4, √2 + ϵ}}]},
  {Red, Dashed, Line[{{0, √2 - ϵ}, {4, √2 - ϵ}}]},
  {Red, Dashed, Line[{{2 - δ[ϵ], 0}, {2 - δ[ϵ], √2 + ϵ}}]},
  {Red, Dashed, Line[{{2 + δ[ϵ], 0}, {2 + δ[ϵ], √2 + ϵ}}]},
  (*linea orizzontale da l'-ϵ*)
  {Green, Dashed, Line[{{0, 1 - ϵ}, {2 + δ1[ϵ], 1 - ϵ}}]},
  (*linea orizzontale da l'+ϵ*)
  {Green, Dashed, Line[{{0, 1 + ϵ}, {2 + δ1[ϵ], 1 + ϵ}}]},
  (*linee verticali*)
  {Green, Dashed, Line[{{2 - δ1[ϵ], 0}, {2 - δ1[ϵ], 1 + ϵ}}]},
  {Green, Dashed, Line[{{2 + δ1[ϵ], 0}, {2 + δ1[ϵ], 1 + ϵ}}]},
  Text["P0", {2 - 0.1, 0.1 + √2}],
  {
   PointSize[0.012], Point[{2, √2}]
  }
 }
]
```

In[8]:= `plot1[0.5]`

Out[8]=



Da tale grafico vediamo che per $l' = 1$ la definizione di limite viene violata. Creiamo ora una lista di fotogrammi da esportare in formato gif, dopo aver indicato la directory di destinazione.

In[9]:=
```
movie = Table[
   plot1[ϵ],
   {ϵ, 1, 0.1, -0.01}
  ];
```