Trocoide

Marcello Colozzo – http://www.extrabyte.info

Abbiamo visto che la cicloide è la traiettoria percorsa da un punto qualunque della frontiera di un cerchio che rotola su una retta. Introduciamo ora quest'altra curva notevole:

Definizione 1 *Assegnato il cerchio $\Sigma(t)$ che rotola sull'asse x, in modo tale che la sua posizione a $t = 0$ è*

$$\Sigma_0 : x^2 + (y - R)^2 \leq R^2,$$

dicesi **trocoide** *la traiettoria percorsa da un punto P_0 della circonferenza γ_0 concentrica a Σ_0 e di raggio $R_0 > R$, e che rotola sull'asse x con la stessa velocità di traslazione di $\Sigma(t)$.*

Per ottenere le equazioni orarie del moto di $P \in \gamma(t)$, ovvero una rappresentazione parametrica della trocoide, è conveniente uitlizzare il formalismo delle matrici di rotazione. A tale scopo riscriviamo l'equazione matriciale:

$$X(t) = \bar{X}_0 + B(\omega_0 t)\left(X_0 - \bar{X}_0\right) + Y(t) \tag{1}$$

Nel caso in esame, il vettore colonna $\bar{X}_0$ i cui elementi sono le componenti cartesiane del centro di Σ_0, è invariato:

$$\bar{X}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ R \end{pmatrix},$$

mentre è facile convincersi che il vettore colonna X_0 della posizione iniziale P_0 del punto mobile P, è:

$$X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ R - R_0 \end{pmatrix},$$

e la traslazione

$$Y(t) = \begin{pmatrix} v_0 t \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ne segue

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ R \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(\omega_0 t) & \sin(\omega_0 t) \\ -\sin(\omega_0 t) & \cos(\omega_0 t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -R_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_0 t \\ 0 \end{pmatrix}$$

Svolgendo i calcoli e rammentando che $\omega_0 = \frac{v_0}{R}$

$$x(t) = v_0 t - R_0 \sin\left(\frac{v_0 t}{R}\right), \quad y(t) = R - R_0 \cos\left(\frac{v_0 t}{R}\right), \tag{2}$$

cioè le equazioni orarie del moto di P, e quindi una rappresentazione parametrica della trocoide:

$$\mathbf{x}(t) = \left[v_0 t - R_0 \sin\left(\frac{v_0 t}{R}\right)\right]\mathbf{i} + \left[R - R_0 \cos\left(\frac{v_0 t}{R}\right)\right]\mathbf{j}, \quad t \in [0, +\infty) \tag{3}$$

Un tipico andamento è riportato in fig. 1.

Le componenti cartesiane del vettore velocità sono:

$$v_x = v_0\left[1 - \frac{R_0}{R}\cos\left(\frac{v_0 t}{R}\right)\right], \quad v_y = \frac{R_0 v_0}{R}\sin\left(\frac{v_0 t}{R}\right) \tag{4}$$

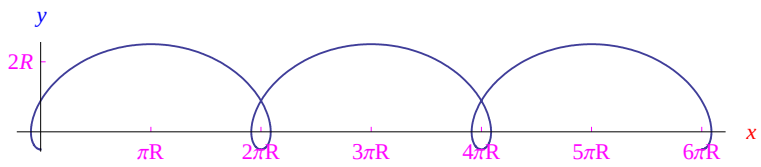

Figura 1: Trocoide ottenuta per$R_0 = 1.2R$.

Quindi la velocità vettoriale

$$\mathbf{v}(t) = v_0 \left[1 - \frac{R_0}{R} \cos\left(\frac{v_0 t}{R}\right)\right] \mathbf{i} + \frac{R_0 v_0}{R} \sin\left(\frac{v_0 t}{R}\right) \mathbf{j} \tag{5}$$

che ci consente di determinare gli istanti di arresto (i.e. punti singolari della trocoide).

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{0} \Longleftrightarrow \begin{cases} 1 - \frac{R_0}{R} \cos\left(\frac{v_0 t}{R}\right) = 0 \\ \sin\left(\frac{v_0 t}{R}\right) = 0 \end{cases} \tag{6}$$

Risolviamo la prima

$$\cos\left(\frac{v_0 t}{R}\right) = \frac{R}{R_0} < 1 \Longrightarrow t_* = \frac{R}{v_0} \arccos\left(\frac{R}{R_0}\right) \tag{7}$$

Risolviamo la seconda delle (6):

$$\sin\left(\frac{v_0 t}{R}\right) = 0 \Longrightarrow t_k = \frac{k\pi R}{v_0}, \quad \forall k \in \mathbb{N} \tag{8}$$

È facile persuadersi che

$$\nexists k \in \mathbb{N} \mid t_k = t_* \tag{9}$$

Infatti:

$$\begin{aligned} t_k = t_* &\Longleftrightarrow k\pi = \arccos\left(\frac{R}{R_0}\right) \Longleftrightarrow \cos(k\pi) = \frac{R}{R_0} \\ &\Longleftrightarrow (-1)^k = \frac{R}{R_0} < 1 \quad \text{mai!} \end{aligned}$$

Ne consegue che il sistema (6) è incompatibile, onde non esistono istanti di arresto, ovvero la trocoide è priva di punti singolari.

In ogni caso, la componente v_y si annulla negli istanti $t_k = \frac{k\pi R}{v_0}$, per cui $\mathbf{v}(t_k)$ è parallelo all'asse x. Precisamente:

$$\mathbf{v}(t_k) = v_0 \left[1 - \frac{R_0}{R}(-1)^k\right] \mathbf{i} = \begin{cases} v_0 \left(1 - \frac{R_0}{R}\right) \mathbf{i}, & \text{se } k \text{ è pari} \\ v_0 \left(1 + \frac{R_0}{R}\right) \mathbf{i}, & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{10}$$

Rammentando che $R_0 > R$, si ha:

$$\mathbf{v}(t_k) = \begin{cases} -v_0 \left|\frac{R_0}{R} - 1\right| \mathbf{i}, & \text{se } k \text{ è pari} \\ v_0 \left(1 + \frac{R_0}{R}\right) \mathbf{i}, & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{11}$$

Ne consegue che se k è pari, il vettore velocità è antiparallelo all'asse x. Viceversa, se k è dispari.

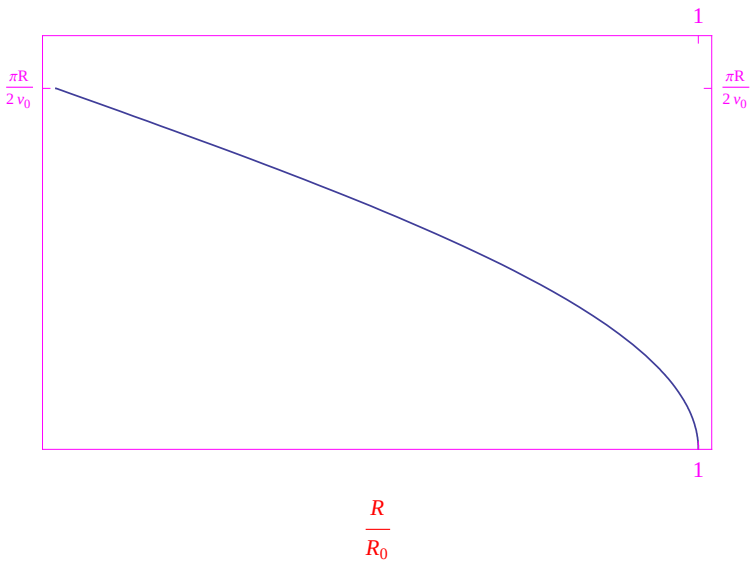

Figura 2: Grafico della funzione $t_* = \frac{R}{v_0} \arccos\left(\frac{R}{R_0}\right)$.

Esaminiamo la soluzione (7). Ricordiamo che la funzione arccos è definita in $[-1, 1]$, e nel nostro caso interessa la restrizione all'intervallo $\left[0, \frac{R}{R_0}\right]$, come mostrato in fig. 2.

Calcoliamo $v_y(t_*)$:

$$\begin{aligned} v_y(t_*) &= \frac{R_0 v_0}{R} \sin\left[\arccos\left(\frac{R}{R_0}\right)\right] = \frac{R_0 v_0}{R}\sqrt{1 - \cos^2\left(\arccos\left(\frac{R}{R_0}\right)\right)} \\ &= \frac{R_0 v_0}{R}\sqrt{1 - \frac{R^2}{R_0^2}} = \frac{v_0}{R}\sqrt{R_0^2 - R^2} \end{aligned}$$

Segue che il vettore velocità all'istante

$$0 < t_* = \frac{R}{v_0} \arccos\left(\frac{R}{R_0}\right) < \frac{\pi R}{2 v_0}$$

è

$$\mathbf{v}(t_*) = \frac{v_0}{R}\sqrt{R_0^2 - R^2}\,\mathbf{j} \tag{12}$$

manifestamente parallelo e concorde all'asse y. Per determinare la corrispondente posizione del punto, valutiamo

$$\begin{aligned} x(t_*) &= R \arccos\left(\frac{R}{R_0}\right) - R_0 \sin\left[\arccos\left(\frac{R}{R_0}\right)\right] \\ &= R \arccos\left(\frac{R}{R_0}\right) - R_0\sqrt{1 - \frac{R^2}{R_0^2}} \end{aligned} \tag{13}$$

mentre l'ordinata è nulla

$$y(t_*) = 0,$$

cosicché

$$\mathbf{x}(t_*) = \left[R \arccos\left(\frac{R}{R_0}\right) - R_0\sqrt{1 - \frac{R^2}{R_0^2}}\right]\mathbf{i} \tag{14}$$

Dalla (13) vediamo che $x(t_*) < 0$ per ogni $R \in (0, R_0)$, come confermato dal grafico di fig. 3. Per visualizzare il punto successivo dobbiamo eseguire una traslazione di $2\pi R$, giacché tale è il periodo della trocoide (cfr. fig. 4).

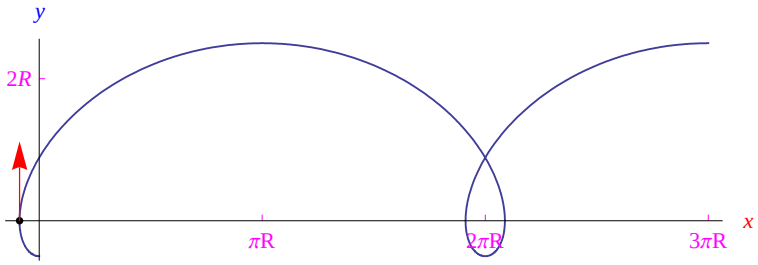

Figura 3: Nel punto di ascissa $x(t_*) < 0$ il vettore velocità è parallelo e concorde all'asse y.

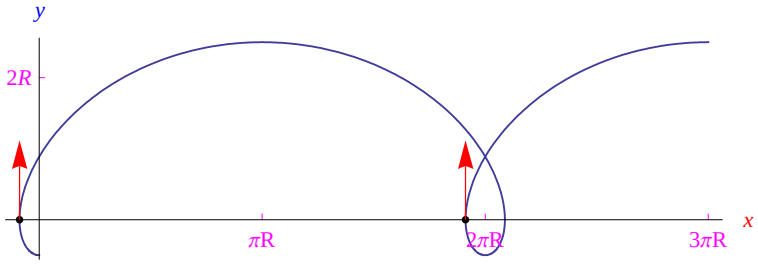

Figura 4: Nel punto di ascissa $x(t_*) + 2\pi R$ il vettore velocità è parallelo e concorde all'asse y.