Appunti di Fisica del Reattore nucleare

Ing. Giorgio Bertucelli - (file scaricato da http://www.extrabyte.info)

1 Dispersione o scattering anisotropo

Riprendiamo l'equazione di Boltzmann:

$$\mu\frac{\partial\Phi(z,\mu)}{\partial z}+\Sigma\Phi(z,\mu)=\frac{1}{2}N_s\sigma_{s0}\int_{-1}^{+1}\Phi(z,\mu')\,d\mu'+\frac{3}{2}\mu N_s\sigma_{s1}\int_{-1}^{+1}\mu'\Phi(z,\mu')\,d\mu' \tag{1}$$

dove come già si è visto è

$$\sigma_{s0}=\int_{-1}^{+1}\sigma_s(\mu_0)\,d\mu_0,\quad \sigma_{s1}=\int_{-1}^{+1}\mu_0\,\sigma_s(\mu_0)\,d\mu_0=\bar{\mu}_0\sigma_{s0} \tag{2}$$

Si può allora scrivere:

$$\mu\frac{\partial\Phi(z,\mu)}{\partial z}+\Sigma\Phi(z,\mu)=\Sigma_s\left[\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\Phi(z,\mu')\,d\mu'+\frac{3}{2}\mu\bar{\mu}_0\int_{-1}^{+1}\mu'\Phi(z,\mu')\,d\mu'\right] \tag{3}$$

Supponiamo che sia:

$$\Phi(z,\mu)=h(\mu)\,e^{\pm kz} \tag{4}$$

Sostituendo si ha:

$$(\Sigma\pm k\mu)\,h(\mu)=\Sigma_s\left[\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}h(\mu')\,d\mu'+\frac{3}{2}\mu\bar{\mu}_0\int_{-1}^{+1}\mu' h(\mu')\,d\mu'\right] \tag{5}$$

che potremo sempre scrivere così:

$$(\Sigma\pm k\mu)\,h(\mu)=\text{costante}\cdot(A+\mu\bar{\mu}_0) \tag{6}$$

Le incognite sono dunque A e k. La (5) allora diventa:

$$A+\mu\bar{\mu}_0=\Sigma_s\left[\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\frac{A+\mu'\bar{\mu}_0}{\Sigma\pm k\mu'}d\mu'+\frac{3}{2}\mu\bar{\mu}_0\int_{-1}^{+1}\mu'\frac{A+\mu'\bar{\mu}_0}{\Sigma\pm k\mu'}d\mu'\right] \tag{7}$$

Segue

$$\begin{aligned}A+\mu\bar{\mu}_0=&\,A\frac{\Sigma_s}{2k}\ln\frac{\Sigma+k}{\Sigma-k}d\mu'\pm\Sigma_s\frac{\bar{\mu}_0}{2}\left(\frac{2}{k}-\frac{\Sigma}{k^2}\ln\frac{\Sigma+k}{\Sigma-k}\right)\pm\\ &\pm A\frac{3\Sigma_s\mu\bar{\mu}_0}{2}\left(\frac{2}{k}-\frac{\Sigma}{k^2}\ln\frac{\Sigma+k}{\Sigma-k}\right)+\frac{3\Sigma_s\mu\bar{\mu}_0}{2}\left(-2\frac{\Sigma}{k^2}-\frac{\Sigma}{k^2}\ln\frac{\Sigma+k}{\Sigma-k}\right)\end{aligned} \tag{8}$$

Uguagliano i termini con le stesse potenze in μ si ottiene:

$$A=A\frac{\Sigma_s}{2k}\ln\frac{\Sigma+k}{\Sigma-k}\pm\Sigma_s\frac{\bar{\mu}_0}{2}\left(\frac{2}{k}-\frac{\Sigma}{k^2}\ln\frac{\Sigma+k}{\Sigma-k}\right) \tag{9}$$

$$\mu\bar{\mu}_0=\pm A\frac{3\Sigma_s\mu\bar{\mu}_0}{2}\left(\frac{2}{k}-\frac{\Sigma}{k^2}\ln\frac{\Sigma+k}{\Sigma-k}\right)+\frac{3\Sigma_s\mu\bar{\mu}_0}{2}\left(-2\frac{\Sigma}{k^2}-\frac{\Sigma}{k^2}\ln\frac{\Sigma+k}{\Sigma-k}\right) \tag{10}$$

Il valore di A risulta:

$$A = \frac{\frac{\Sigma_s \bar{\mu}_0}{2}\left(\frac{2}{k} - \frac{\Sigma_s}{k^2}\ln\frac{\Sigma+k}{\Sigma-k}\right)}{1 - \frac{\Sigma_s}{k^2}\ln\frac{\Sigma+k}{\Sigma-k}} \Longrightarrow \frac{\Sigma_s}{k^2}\ln\frac{\Sigma+k}{\Sigma-k} = \frac{1+3\frac{\Sigma_a\Sigma_s}{k^2}\bar{\mu}_0}{1+3\frac{\Sigma\Sigma_s}{k^2}\bar{\mu}_0} \tag{11}$$

da cui ricaviamo

$$k^2 = 3\Sigma_a\Sigma_s\left(1-\bar{\mu}_0\right)\left(1 - \frac{4}{5}\frac{\Sigma_a}{\Sigma} + \frac{\Sigma_a}{\Sigma}\frac{\bar{\mu}_0}{1-\bar{\mu}_0} + ...\right) \tag{12}$$

Con ciò si è completato lo studio delle correzioni da apportare al coefficiente di diffusione D della legge di Fick:

$$\mathbf{J} = -D\,\mathrm{grad}\,\Phi \tag{13}$$

Riassumendo:

dalla **diffusione semplice** $\begin{cases} D = \frac{1}{3\Sigma_s} & \text{con scattering isotropo} \\ D = \frac{1}{3\Sigma_s(1-\mu_0)} & \text{con scattering anisotropo} \end{cases}$

dalla **equazione di Boltzmann** $\begin{cases} D = \frac{1}{3\Sigma\left(1-\frac{4}{5}\frac{\Sigma_a}{\Sigma}+...\right)} & \text{con scattering isotropo} \\ D = \frac{1}{3\Sigma(1-\mu_0)\left(1-\frac{4}{5}\frac{\Sigma_a}{\Sigma}+...\right)} & \text{con scattering anisotropo} \end{cases}$

Ricordiamo che tali risultati si sono ottenuti per neutroni monoenergetici.