Appunti di Fisica del Reattore nucleare

Ing. Giorgio Bertucelli - (file scaricato da http://www.extrabyte.info)

1 Flusso transiente

Calcoliamo ora il flusso transiente $\Phi_{Tr}(z)$:

$$\Phi_{Tr}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty i}^{+\infty i} \frac{e^{-\Sigma\eta z}}{\eta} \frac{\tanh^{-1}\eta}{1-\frac{\Sigma_s}{\Sigma}\frac{\tanh^{-1}\eta}{\eta}} d\eta \quad \text{dove} \quad -\eta = \frac{i\omega}{\Sigma} \tag{1}$$

Si ha una singolarità essenziale per $\eta = 1$. Infatti:

$$\tanh^{-1} 1 = \varphi \Longrightarrow \frac{e^{\varphi}-e^{-\varphi}}{e^{\varphi}+e^{-\varphi}} = 1 \Longrightarrow e^{\varphi}-e^{-\varphi} = e^{\varphi}+e^{-\varphi} \tag{2}$$
$$\Longrightarrow -e^{-\varphi} = e^{\varphi} \text{ soddisfatta per } \varphi = \infty$$

Ricordiamo un teorema sull'integrazione di funzioni analitiche:

Teorema 1 *Se $F(p)$ è una funzione analitica della variabile complessa p in un campo molteplicemente connesso, e sul contorno c del campo e sui contorni $c_1, c_2, ..., c_n$ delle zone non connesse, si ha:*

$$\oint_c F(p)\,dp = \oint_{c_1} F(p)\,dp + \oint_{c_2} F(p)\,dp + ... + \oint_{c_n} F(p)\,dp, \tag{3}$$

allora è

$$\oint_{c_1} F(p)\,dp + \oint_{c_2} F(p)\,dp + ... + \oint_{c_n} F(p)\,dp = 0$$

Si congiungano come indicato in fig. 1, con delle linee non connesse al contorno c, in modo da poter eseguire l'integrale secondo il contorno indicato dalle frecce, escludendo le zone non connesse.

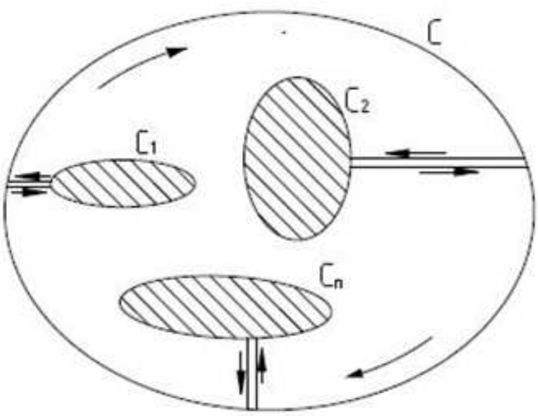

Figura 1: Illustrazione dell'artificio che rende semplicemente connesso un campo molteplicemente connesso.

Questo per le ipotesi fatte, e cioè per la funzione analitica e monodroma definita in un campo semplicemente connesso, è (primo teorema di Cauchy)

$$\oint_c F(p)\,dp = 0 \tag{4}$$

Infatti con l'artificio delle linee di congiunzione il campo si è reso semplicemente connesso. Nel nostro caso è 2:

$$\oint_c \varphi(\eta)\exp(-\Sigma z\eta)\,d\eta = 0 \tag{5}$$

ossia

$$\int_L \varphi(\eta)\exp(-\Sigma z\eta)\,d\eta + \int_{\Gamma_1}(\ldots)\,d\eta + \int_{AB}(\ldots)\,d\eta + \int_{\Gamma_2}(\ldots)\,d\eta + \int_{CD}(\ldots)\,d\eta + \int_{\Gamma_3}(\ldots)\,d\eta = 0 \tag{6}$$

dove si ha:

$$\int_L \varphi(\eta)\exp(-\Sigma z\eta)\,d\eta \quad \alpha\to\infty \quad = \int_{-i\alpha}^{i\alpha}\varphi(\eta)\exp(-\Sigma z\eta)\,d\eta \tag{7}$$

$$\int_{\Gamma_1+\Gamma_3}\varphi(\eta)\exp(-\Sigma z\eta)\,d\eta \quad R\to\infty \quad = 0$$

$$\int_{\Gamma_2}\varphi(\eta)\exp(-\Sigma z\eta)\,d\eta \quad r\to 0 \quad = 0$$

$$\int_{AB}\varphi(\eta)\exp(-\Sigma z\eta)\,d\eta \quad \begin{matrix} r\to 0 \\ R\to\infty \end{matrix} \quad = \frac{1}{2\pi i}\int_{\infty}^{1}\exp(-\Sigma z\eta)\cdot\frac{\frac{\pi}{2}i+\tanh^{-1}\frac{1}{\eta}}{\eta}\cdot\frac{d\eta}{1-\frac{\Sigma_s}{\Sigma}\cdot\frac{\frac{\pi}{2}i+\tanh^{-1}\frac{1}{\eta}}{\eta}}$$

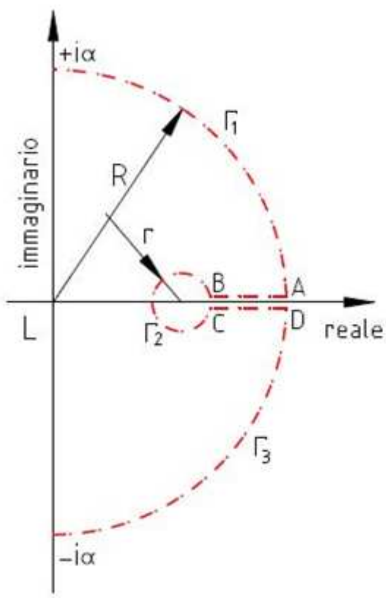

Figura 2: Cammino di integrazione nel caso in esame.

Raccogliendo risulta:

$$\Phi_{Tr}(z) = \int_1^{\infty}\frac{2\Sigma^2\eta - \exp(-\Sigma^2 z\eta)}{\left[2\Sigma\eta - 2\Sigma_s\tanh^{-1}\frac{1}{\eta}\right]^2 + \pi^2\Sigma_s^2} \tag{8}$$

e ricordando l'espressione

$$\Phi_{As}(z) = \beta \frac{e^{-kz}}{2kD}$$

si conclude che il $\Phi_{Tr}(z)$ è valido per z piccoli e trascurabile per z grandi; viceversa invece per $\Phi_{Tr}(z)$. Naturalmente la divisione del flusso tra parte asintotica e parte transiente è solo un artificio matematico per ottenere un'espressione relativamente semplice per il flusso totale.