Appunti di Fisica del Reattore nucleare

Ing. Giorgio Bertucelli - (file scaricato da http://www.extrabyte.info)

0.1 Flusso asintotico

Per quanto visto nel numero precedente, la funzione integranda che compare nell'espressione del flusso totale è

$$F(p) = \frac{1}{4\pi i} \frac{e^{pz}}{p} \ln \frac{\Sigma + p}{\Sigma - p} \frac{1}{1 - \frac{\Sigma_s}{2p} \ln \frac{\Sigma + p}{\Sigma - p}} \tag{1}$$

ove $p = i\omega$. Poniamo

$$P(p) = \frac{1}{4\pi i} e^{pz} \ln \frac{\Sigma + p}{\Sigma - p}, \quad Q(p) = 1 - \frac{\Sigma_s}{2p} \ln \frac{\Sigma + p}{\Sigma - p}, \tag{2}$$

quindi

$$F(p) = \frac{P(p)}{qQ(p)} \tag{3}$$

Calcoliamo il flusso asintotico $\Phi_{As}(z)$: il valore dell'integrale è per $p = -k$

$$\Phi_{As}(z) = 2\pi i \left[\frac{P(p)}{qQ(p)} \right] \tag{4}$$

Procedendo con i calcoli si trova:

$$\Phi_{As}(z) = \frac{1}{2} e^{-kz} \ln \frac{\Sigma - k}{\Sigma + k} \frac{1}{1 - \frac{\Sigma_s \Sigma}{\Sigma^2 - k^2}} = \frac{1}{2} e^{-kz} \ln \frac{\Sigma - k}{\Sigma + k} \frac{\Sigma^2 - k^2}{-\Sigma^2 + k^2 + \Sigma_s \Sigma} \tag{5}$$

Ricordando che si ha un polo semplice per

$$\frac{\Sigma_s}{2p} \ln \frac{\Sigma + k}{\Sigma - k} = 1$$

e per $p = k$ si ha

$$\Phi_{As}(z) = \frac{e^{-kz}}{2kD} \cdot \frac{2\Sigma_a}{\Sigma_s} \cdot \frac{\Sigma^2 - k^2}{-\Sigma^2 + k^2 + \Sigma_s \Sigma} = \frac{1}{2} e^{-kz} \frac{2k^2 \Sigma_a}{k \Sigma_s \Sigma_a} \cdot \frac{\Sigma^2 - k^2}{k^2 - \Sigma_a \Sigma} \tag{6}$$

dove $\frac{k^2}{\Sigma_a} = \frac{1}{D}$.

$$\Phi_{As}(z) = \frac{e^{-kz}}{2kD} \cdot \frac{2\Sigma_a}{\Sigma_s} \cdot \frac{\Sigma^2 - k^2}{k^2 - \Sigma_a \Sigma} = \beta \frac{e^{-kz}}{2kD} \tag{7}$$

essendo

$$\beta = \frac{2\Sigma_a}{\Sigma_s} \cdot \frac{\Sigma^2 - k^2}{k^2 - \Sigma_a \Sigma} \tag{8}$$

Ricordiamo la soluzione ottenuta per l'equazione

$$D \frac{d^2 \Phi}{dx^2} - \Sigma_a \Phi(x) + \delta(x) = 0 \Longrightarrow \frac{d^2 \Phi}{dx^2} - k^2 \Phi(x) + \frac{\delta(x)}{D} = 0 \tag{9}$$

dove $k^2 = \frac{\Sigma_a}{D}$. Avevamo trovato:

$$\Phi(x) = \frac{e^{-kz}}{2kD} \tag{10}$$

con sorgente infinita e mezzo isotropo. Si nota che tra questa e $\Phi_{As}(z)$ c'è una proporzionalità dovuta alla presenza del coefficiente β. Nella diffusione si era trattato quale primo valore di D: $D = \frac{1}{3\Sigma_s}$ e $\beta = 1$. Qui invece è $D = \frac{\Sigma_a}{k^2}$. Sostituendo β a k^2 l'espressione trovata nell'ipotesi di Σ_a piccolo si ha:

$$\beta = \frac{2\Sigma_a}{\Sigma_s} \cdot \frac{\Sigma^2 - 2\Sigma_a\Sigma\left(1 - \frac{4}{5}\frac{\Sigma_a}{\Sigma}\right)}{-\Sigma_a\Sigma + 3\Sigma_a\Sigma\left(1 - \frac{4}{5}\frac{\Sigma_a}{\Sigma}\right)} = \frac{2\Sigma_a}{\Sigma_s} \cdot \frac{1 - 3\left(\frac{\Sigma_a}{\Sigma}\right) - \frac{12}{5}\left(\frac{\Sigma_a}{\Sigma}\right)^2}{2\left(\frac{\Sigma_a}{\Sigma}\right) - \frac{12}{5}\left(\frac{\Sigma_a}{\Sigma}\right)^2} \tag{11}$$

Essendo $\frac{\Sigma_a}{\Sigma} = 1$ sviluppando in serie dopo aver eseguito la divisione dei polinomi in $\frac{\Sigma_a}{\Sigma}$ si ha:

$$\beta = \left(1 + \frac{\Sigma_a}{\Sigma}\right)\left(1 - \frac{9}{5}\frac{\Sigma_a}{\Sigma} + ...\right) \tag{12}$$

Troncando al primo ordine in $\frac{\Sigma_a}{\Sigma}$

$$\beta = 1 - \frac{4}{5}\frac{\Sigma_a}{\Sigma} \tag{13}$$

Poichè è $k^2 = 3\Sigma_a\Sigma\left(1 - \frac{4}{5}\frac{\Sigma_a}{\Sigma}\right)$ si può scrivere:

$$k^2 = 3\Sigma_a\Sigma\beta \tag{14}$$

Nel caso di acqua come mezzo moderatore si ha

$$\frac{\Sigma_a}{\Sigma} \simeq 10^{-2}$$

Nel caso di grafite come mezzo moderatore:

$$\frac{\Sigma_a}{\Sigma} \simeq 10^{-2}$$

In entrambi i casi è $\beta \simeq 1$. Quindi per tali moderatori il k della diffusione coincide con il k relativo a $\Phi_{As}(z)$. Dunque il $\Phi_{As}(z)$ è la soluzione dell'equazione

$$D\frac{d^2\Phi}{dx^2} - \Sigma_a\Phi(x) + \beta\delta(x) = 0 \tag{15}$$