Appunti di Fisica del Reattore nucleare

Ing. Giorgio Bertucelli - (file scaricato da http://www.extrabyte.info)

L'equazione omogenea esaminata nel numero precedente presenta un'altra soluzione, in cui le variabili z, μ sono sostituite da $-z, -\mu$, oppure k è sostituito da $-k$.

Ritorniamo all'equazione non omogenea, in cui è $\delta(z)/4\pi \neq 0$ e operiamo ambo i membri per trasformata di Fourier. Per una funzione $\Phi(z,\mu)$, potremo scrivere:

$$\varphi(\omega,\mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(z,\mu)\, e^{-i\omega z} dz \tag{1}$$

Si ottiene allora

$$(\Sigma + i\omega\mu)\, \varphi(\omega,\mu) = \frac{1}{2}\Sigma_s \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(z,\mu)\, e^{-i\omega z} d\mu + \frac{1}{4\pi} \tag{2}$$

Ma il secondo membro non dipende da μ, così è

$$\varphi(\omega,\mu) = \frac{\varphi_0(\omega)}{\Sigma + i\omega\mu} \tag{3}$$

Sostituendo nella (2) si ottiene per $\varphi_0(\omega)$ il valore:

$$\begin{aligned}\varphi_0(\omega) &= \frac{1}{2}\Sigma_s \int_{-1}^{+1} \frac{\varphi_0(\omega)}{\Sigma + i\omega\mu} d\mu + \frac{1}{4\pi} = \frac{1}{2}\Sigma_s \varphi_0(\omega) \int_{-1}^{+1} \frac{d\mu}{\Sigma + i\omega\mu} + \frac{1}{4\pi} \\ &= \frac{1}{2}\Sigma_s \varphi_0(\omega) \frac{1}{i\omega} \ln\frac{\Sigma + i\omega}{\Sigma - i\omega} + \frac{1}{4\pi}\end{aligned} \tag{4}$$

da cui si ha:

$$\varphi_0(\omega) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{1 - \frac{\Sigma_s}{2i\omega}\ln\frac{\Sigma+i\omega}{\Sigma-i\omega}} \tag{5}$$

e dunque è

$$\varphi(\omega,\mu) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\Sigma + i\omega} \frac{1}{1 - \frac{\Sigma_s}{2i\omega}\ln\frac{\Sigma+i\omega}{\Sigma-i\omega}} \tag{6}$$

Antitrasformando si ha:

$$\Phi(z,\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\omega,\mu)\, e^{i\omega z} d\omega = \frac{1}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega z}}{\Sigma + i\omega} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\Sigma_s}{2i\omega}\ln\frac{\Sigma+i\omega}{\Sigma-i\omega}} d\omega \tag{7}$$

Il flusso totale $\Phi_{tot}(z)$ diventa:

$$\Phi_{tot}(z) = 2\pi \int_{-1}^{+1} \Phi(z,\mu)\, d\mu = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega z} d\omega}{i\omega} \left[\ln\frac{\Sigma + i\omega}{\Sigma - i\omega}\right] \cdot \left[1 - \frac{\Sigma_s}{2i\omega} \ln\frac{\Sigma + i\omega}{\Sigma - i\omega}\right]^{-1} \tag{8}$$

Osserviamo che l'espressione $\frac{1}{i\omega}\left[\ln\frac{\Sigma+i\omega\mu}{\Sigma-i\omega\mu}\right]$ è reale. Infatti per il numero complesso $\frac{\Sigma+i\omega}{\Sigma-i\omega}$ si ha:

$$\left|\frac{\Sigma + i\omega}{\Sigma - i\omega}\right| = \frac{|\Sigma + i\omega|}{|\Sigma - i\omega|} = \frac{\sqrt{\Sigma^2 + \omega^2}}{\sqrt{\Sigma^2 + \omega^2}} = 1 \qquad \text{il suo modulo} \tag{9}$$

Il suo argomento:

$$\arg\frac{\Sigma+i\omega}{\Sigma-i\omega}=\arg\left(\Sigma+i\omega\right)-\arg\left(\Sigma-i\omega\right)=\arctan\left(\frac{\omega}{\Sigma}\right)-\arctan\left(-\frac{\omega}{\Sigma}\right)=2\arctan\left(\frac{\omega}{\Sigma}\right) \tag{10}$$

Allora possiamo scrivere:

$$\frac{\Sigma+i\omega}{\Sigma-i\omega}=1\cdot\exp\left[i2\arctan\left(\frac{\omega}{\Sigma}\right)\right]=\frac{1}{i\omega}2i\arctan\left(\frac{\omega}{\Sigma}\right)=\frac{2}{\omega}\arctan\left(\frac{\omega}{\Sigma}\right)$$

che è un numero reale. Posto $p=i\omega$ la (8) diventa:

$$\Phi_{tot}\left(z\right)=\frac{1}{4\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{pz}}{p}\left[\ln\frac{\Sigma+p}{\Sigma-p}\right]\frac{dp}{1-\frac{\Sigma_s}{2p}\ln\frac{\Sigma+p}{\Sigma-p}} \tag{11}$$

La funzione integranda contiene delle singolarità. Ricordiamo dall'Analisi complessa che le singolarità si dividono in:

1. **poli**. Sono punti nei quali pur non essendo regolare $f\left(p\right)$, esiste un indice n che rende regolare il prodotto $\left(p-p_0\right)^n f\left(p\right)$. Il punto p_0 è in tal caso un *polo di ordine* n.

2. **Singolarità essenziali**. Sono punti nei quali non esiste un indice n che rende regolare il prodotto suddetto.

In relazione alla natura delle loro singolarità le funzioni di variabile complessa si distiunguono in:

- **Funzioni olomorfe**. Si tratta di funzioni di variabili complessa in cui l'unica singolarità è il punto improprio ($p=\infty$), ove se la singolarità è polare la funzione è razionale intera. Altrimenti la funzione è trascendente.

- **Funzioni meromorfe**. Sono caratterizzate da singolarità polari al finito, oltre che da una singolarità essenziale per $p=\infty$.

Nel caso in esame, si ha un *polo semplice* per

$$\frac{\Sigma_s}{2p}\ln\frac{\Sigma+p}{\Sigma-p}=1$$

che confrontata con quella già incontrata

$$\frac{\Sigma_{s0}}{2k}\ln\frac{\Sigma+k}{\Sigma-k}=1 \text{ si ha } p=k=i\omega$$

Si ha una singolarità essenziale per $p=\pm\Sigma$. Il comportamento del flusso come funzione di z può essere chiarito più facilmente se si trasforma l'integrale (8) modificando il percorso di integrazione, per quanto possibile, in modo tale che la parte immaginaria di integrazione diventi il più grande possibile. Ciò fatto, $\exp\left(i\omega z\right)$ per $z>0$ diventa molto piccolo e si possono trascurare le parti dell'integrale in cui la parte immaginaria ω può essere resa arbitrariamente grande.

Se $z<0$ il percorso di integrazione si modificherà nella direzione opposta, ma noi non siamo interessati a questo caso, poiché $\Phi_{tot}\left(-z\right)=\Phi_{tot}\left(z\right)$, così che è sufficiente calcolare $\Phi_{tot}\left(z\right)$ per $z>0$.

Il percorso di integrazione non può essere sostituito arbitrariamente, perchè l'integrando, come funzione di ω, ha singolarità. In accordo con la teoria delle variabili complesse, il percorso di integrazione non può essere sostituito affatto attraverso singolarità essenziali, e il cambiamento attraverso i poli darebbe un finto contributo all'integrale.

Allora il flusso $\Phi(z)$ si può considerare la somma di due contributi: un flusso $\Phi_{As}(z)$ asintotico dovuto al polo e un $\Phi_{tr}(z)$ transiente dovuto alla singolarità essenziale, che ha valori considerevoli per z piccoli ed è trascurabile per z grandi.