Appunti di Fisica del Reattore nucleare

Ing. Giorgio Bertucelli - (file scaricato da http://www.extrabyte.info)

Caso 2 – Stato stazionario, neutroni monoenergetici, scattering isotropo.
Riprendiamo l'equazione di Boltzmann

$$-\cos\theta\frac{\partial\Phi(z,\Omega)}{\partial z}+\Sigma\Phi(z,\Omega)=\int d\Omega'\Sigma_s(\Omega'\to\Omega)\,\Phi(z,\Omega')+S(z,\Omega) \tag{1}$$

Poiché $\Sigma_s = N\sigma_s(\mu_0)$ possiamo scrivere

$$\Sigma_s(\mu_0)=\sum_{l=0}^{+\infty}\frac{2l+1}{2}\Sigma_{sl}P_l(\mu_0)=2\pi\Sigma_s(\Omega'\to\Omega) \tag{2}$$

Troncando lo sviluppo in serie al primo termine si ha:

$$\frac{1}{2}\Sigma_{s0}=2\pi\Sigma_s(\Omega'\to\Omega)\Longrightarrow\Sigma_s(\Omega'\to\Omega)=\frac{\Sigma_{s0}}{4\pi} \tag{3}$$

La variazione di Ω' cioè $d\Omega'$ definisce un angolo solido, il cui valore si ottiene subito ricordando:

$$\frac{\text{area}}{\text{raggio}^2}=\frac{\sin\theta d\theta d\varphi}{1^2}$$

Allora la (1) diventa:

$$-\cos\theta\frac{\partial\Phi(z,\Omega)}{\partial z}+\Sigma\Phi(z,\Omega)=S(z,\Omega)+\frac{\Sigma_{s0}}{4\pi}\int_0^{\pi}d\theta'\sin\theta'\int_0^{2\pi}d\varphi'\Phi(z,\Omega') \tag{4}$$

Essendo $\Omega=\Omega(\theta,\varphi)=\Omega(\mu,\varphi)$ integrando ambo i membri per $d\varphi$ si ha:

$$-\mu\frac{\partial\Phi(z,\Omega)}{\partial z}+\Sigma\Phi(z,\Omega)=S(z,\Omega)+\frac{\Sigma_{s0}}{2}\int_{-1}^{+1}\Phi(z,\mu)\,d\mu \tag{5}$$

Supponiamo che la sorgente esterna si trovi su di un piano; ebbene la $S(z,\Omega)$ può essere rappresentata da

$$\frac{\delta(z)}{4\pi}\ \text{in cui }\delta(z)\text{ è la funzione di Dirac}$$

Per la soluzione dell'equazione di Boltzmann (5) immaginiamo che $\Phi(z,\mu)$ possa scriversi nella forma

$$\Phi(z,\mu)=h(\mu)\,e^{-kz} \tag{6}$$

Per una successione di valori k_i dove $i=0,1,2,...,n$ tali che $k_0<k_1<k_2<...<k_n$ si potrà scrivere:

$$\Phi(z,\mu)=\sum_{i=0}^{n}h_i(\mu)\,e^{-k_iz} \tag{7}$$

Sostituendo ed eseguendo le derivazioni per $z\neq 0$ si ha:

$$-\mu kh(\mu)\,e^{-kz}+\Sigma h(\mu)\,e^{-kz}=\frac{\Sigma_{s0}}{2}e^{-kz}\int_{-1}^{+1}h(\mu)\,d\mu\Longrightarrow \tag{8}$$

$$\Longrightarrow(-\mu k+\Sigma)\,h(\mu)=\frac{\Sigma_{s0}}{2}\int_{-1}^{+1}h(\mu)\,d\mu$$

Osserviamo che il secondo membro è pari ad un certo numero, ovvero è una costante C, ragione per cui si avrà:

$$h(\mu) = \frac{C}{\Sigma - \mu k} \Longrightarrow (-\mu k + \Sigma) \frac{C}{\Sigma - \mu k} = \frac{\Sigma_{s0}}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{C}{\Sigma - \mu k} d\mu \tag{9}$$

$$1 = \frac{\Sigma_{s0}}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{d\mu}{\Sigma - \mu k} \Longrightarrow 1 = \frac{\Sigma_{s0}}{2k} \int_{-1}^{+1} \frac{d(\mu k)}{\Sigma - \mu k} = \frac{\Sigma_{s0}}{2k} \left[\ln(\Sigma - \mu k)\right]_{\mu=+1}^{\mu=-1} \tag{10}$$
$$\Longrightarrow \frac{\Sigma_{s0}}{2k} \ln \frac{\Sigma + k}{\Sigma - k} = 1 \Longrightarrow \frac{\Sigma_{s0}}{k} \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \frac{k}{\Sigma}}{1 - \frac{k}{\Sigma}} = 1$$

con $1 + \frac{k}{\Sigma} > 0$ e si potrà scrivere:

$$\frac{\frac{\Sigma_{s0}}{\Sigma}}{\frac{k}{\Sigma}} \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \frac{k}{\Sigma}}{1 - \frac{k}{\Sigma}} = 1 \Longrightarrow \frac{\Sigma_{s0}}{\Sigma} \tanh^{-1} \frac{k}{\Sigma} = 1 \tag{11}$$

Sviluppiamo in serie di Mac-Laurin il primo membro:

$$\frac{\Sigma_{s0}}{\Sigma} \left[\frac{k}{\Sigma} + \frac{1}{3}\left(\frac{k}{\Sigma}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{k}{\Sigma}\right)^5 + \frac{1}{7}\left(\frac{k}{\Sigma}\right)^7 + ...\right] = 1 \tag{12}$$
$$\Longrightarrow \frac{\Sigma_{s0}}{\Sigma} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{k}{\Sigma}\right)^{2n+1} = 1$$

$$\frac{\Sigma_{s0}}{\Sigma} \frac{k}{\Sigma} \left[1 + \frac{1}{3}\left(\frac{k}{\Sigma}\right)^2 + \frac{1}{5}\left(\frac{k}{\Sigma}\right)^4 + \frac{1}{7}\left(\frac{k}{\Sigma}\right)^6 + ...\right] = 1 \tag{13}$$
$$\Longrightarrow 1 + \frac{1}{3}\left(\frac{k}{\Sigma}\right)^2 + \frac{1}{5}\left(\frac{k}{\Sigma}\right)^4 + \frac{1}{7}\left(\frac{k}{\Sigma}\right)^6 + ... = \frac{\Sigma}{\Sigma_{s0}} = \frac{\Sigma_a}{\Sigma_{s0}} + \frac{\Sigma_s}{\Sigma_{s0}}$$

Quindi

$$\frac{1}{3}\left(\frac{k}{\Sigma}\right)^2 + \frac{1}{5}\left(\frac{k}{\Sigma}\right)^4 + \frac{1}{7}\left(\frac{k}{\Sigma}\right)^6 + ... = \frac{\Sigma_a}{\Sigma_{s0}} \tag{14}$$

e posto $\chi = \left(\frac{k}{\Sigma}\right)^2$ scriveremo:

$$\frac{1}{3}\chi + \frac{1}{5}\chi^2 + \frac{1}{7}\chi^3 + ... = \frac{\Sigma_a}{\Sigma_{s0}} \tag{15}$$

Siamo quindi giunti ad un'espressione del tipo

$$\left(a = \frac{1}{3}\right) x + \left(b = \frac{1}{5}\right) x^2 + \left(c = \frac{1}{7}\right) x^3 + ... = y$$

e si vuole determinare la x

$$x = Ay + By^2 + Cy^3 + ... \Longrightarrow \tag{16}$$
$$\Longrightarrow y = a\left(Ay + By^2 + Cy^3 + ...\right) + b\left(Ay + By^2 + Cy^3 + ...\right)^2 + c\left(Ay + By^2 + Cy^3 + ...\right)^3 + ...$$

uguagliamo i coefficienti delle potenze di y:

$$\begin{cases} y\left(aA\right)=1 \qquad A=\frac{1}{a}=\frac{1}{1/3}=3 \\ y^2\left(aB+bA^2\right)=0 \qquad B=-\frac{bA^2}{a}=-\frac{3^3}{5} \\ y^3\left(aC+cA^3+2AB\right)=0 \qquad C=-\frac{cA^3+2AB}{a}=\frac{47}{5}\cdot\frac{3^4}{7} \\ \ldots \\ y^n=\ldots \end{cases} \tag{17}$$

Scriveremo allora per x

$$x=Ay+By^2+Cy^3+\ldots=3y-\frac{3^3}{5}y^2+\frac{47}{5}\cdot\frac{3^4}{7}y^3+\ldots \tag{18}$$

e ricordando che $y=\frac{\Sigma_a}{\Sigma_s}$ si può scrivere

$$\left(\frac{k}{\Sigma}\right)^2=3\left(\frac{\Sigma_a}{\Sigma_s}\right)-\frac{3^3}{5}\left(\frac{\Sigma_a}{\Sigma_s}\right)^2+\frac{47}{5}\cdot\frac{3^4}{7}\left(\frac{\Sigma_a}{\Sigma_s}\right)^3+\ldots \tag{19}$$
$$\Longrightarrow k^2=3\Sigma^2\left(\frac{\Sigma_a}{\Sigma_s}\right)\left[1-\frac{9}{5}\left(\frac{\Sigma_a}{\Sigma_s}\right)+\frac{47}{5}\cdot\frac{27}{7}\left(\frac{\Sigma_a}{\Sigma_s}\right)^2+\ldots\right]$$

Poniamo $L^2=k^{-2}$

$$L^2=\frac{1}{3\Sigma^2\left(\frac{\Sigma_a}{\Sigma_s}\right)\left[1-\frac{9}{5}\left(\frac{\Sigma_a}{\Sigma_s}\right)+\frac{47}{5}\cdot\frac{27}{7}\left(\frac{\Sigma_a}{\Sigma_s}\right)^2+\ldots\right]} \tag{20}$$
$$=\frac{1}{3\Sigma^2\Sigma\left(1+\frac{\Sigma_a}{\Sigma_s}\right)\left[1-\frac{9}{5}\left(\frac{\Sigma_a}{\Sigma_s}\right)+\frac{47}{5}\cdot\frac{27}{7}\left(\frac{\Sigma_a}{\Sigma_s}\right)^2+\ldots\right]}$$

Sempre per $\Sigma_a=\Sigma_s$ scriveremo

$$k^2=3\Sigma_a^2\Sigma\left[1-\frac{9}{5}\left(\frac{\Sigma_a}{\Sigma_s}\right)+\frac{\Sigma_a}{\Sigma_s}\right]\Longrightarrow k^2=3\Sigma_a^2\Sigma\left(1-\frac{4}{5}\frac{\Sigma_a}{\Sigma_s}\right) \tag{21}$$

Perciò con le correzioni apportate la lunghezza di diffusione del trasporto diventa:

$$L=\frac{1}{\sqrt{3\Sigma\Sigma}\left(1-\frac{4}{5}\frac{\Sigma_a}{\Sigma_s}\right)^{1/2}}=\frac{1}{\sqrt{3\Sigma\Sigma}\left(1-\frac{2}{5}\frac{\Sigma_a}{\Sigma_s}\right)} \tag{22}$$

La soluzione dell'equazione omogenea è

$$\Phi\left(z,\mu\right)=\frac{Ce^{-kz}}{\Sigma-k\mu} \tag{23}$$

in cui C è una costante (cfr. eq. (9)).