Appunti di Fisica del Reattore nucleare

Ing. Giorgio Bertucelli - (file scaricato da http://www.extrabyte.info)

1 Equazione di diffusione

Nella lezione precedente eravamo giunti al seguente sviluppo in polinomi di Legendre arrestato ai primi due termini:

$$\Phi(z,\mu)=\frac{1}{2}\Phi_0(z)+\frac{3}{2}\Phi_1(z)\mu+...=\frac{1}{2}\Phi_0(z)+\frac{3}{2}\Phi_1(z)\bar{\mu} \tag{1}$$

Dimostriamo ora che se si sostituisce la (1) nell'equazione di Boltzmann si ottiene l'*equazione di diffusione*. A tale scopo integriamo rispetto a μ tutti i termini che figurano nella predetta equazione:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{+1}\mu\frac{\partial\Phi(z,\mu)}{\partial z}d\mu+\Sigma\int_{-1}^{+1}\mu\Phi(z,\mu)\,d\mu=\int_{-1}^{+1}S(z,\mu)\,d\mu+\\+\int_{-1}^{+1}\sum_{l=0}^{+\infty}\frac{2l+1}{2}N\sigma_{sl}P_l(\mu)\int_{-1}^{+1}P_l(\mu')\,\Phi(z,\mu')\,d\mu d\mu'\end{aligned} \tag{2}$$

Per le solite condizioni di ortogonalità dei polinomi di Legendre, la (2) si riduce a:

$$\frac{d\Phi_1(z)}{dz}+\Sigma\Phi_0(z)=N\sigma_{s0}\Phi_0(z)+S_0(z) \tag{3}$$

dove $\Sigma=\Sigma_s+\Sigma_a$ e $\Sigma_s=N\sigma_{s0}$. Sostituendo si ha:

$$\frac{\Phi_1(z)}{dz}+\Sigma_a\Phi_0(z)-S_0(z)=0 \tag{4}$$

Moltipichiamo ambo i membri dell'equazione di Boltzmann per $P_l(\mu)$ e integriamo rispetto a μ:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{+1}P_l(\mu)\,\frac{\partial\Phi(z,\mu)}{\partial x}d\mu+\Sigma\int_{-1}^{+1}\mu\Phi(z,\mu)\,d\mu=\\=\int_{-1}^{+1}P_l(\mu)\sum_{l=0}^{+\infty}\frac{2l+1}{2}N\sigma_{sl}P_l(\mu)\int_{-1}^{+1}P_l(\mu')\,\Phi(z,\mu')\,d\mu d\mu'+\int_{-1}^{+1}P_l(\mu)\,S\Phi(z,\mu)\,d\mu\end{aligned} \tag{5}$$

da cui si ricava:

$$\frac{\partial}{\partial z}\int_{-1}^{+1}\mu P_l(\mu)\,\Phi(z,\mu)\,d\mu+\Sigma\Phi_1(z)=N\sigma_{sl}\Phi_1(z) \tag{6}$$

Osserviamo il primo termine:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z}\int_{-1}^{+1}\mu P_l(\mu)\,\Phi(z,\mu)\,d\mu&=\frac{\partial}{\partial z}\int_{-1}^{+1}\mu P_l(\mu)\left[\frac{1}{2}\Phi_0(z)\,P_0(\mu)+\frac{3}{2}\Phi_1(z)\,P_1(\mu)\right]d\mu\\&=\frac{\partial}{\partial z}\int_{-1}^{+1}\mu^2\frac{1}{2}\Phi_0(z)\,d\mu+\frac{\partial}{\partial z}\int_{-1}^{+1}\mu^2\frac{3}{2}\bar{\mu}\Phi_1(z)\,\mu d\mu\\&=\frac{1}{2}\frac{\partial\Phi_0(z)}{\partial z}\int_{-1}^{+1}\mu^2d\mu+\frac{3}{2}\frac{\partial\Phi_1(z)}{\partial z}\bar{\mu}\int_{-1}^{+1}\mu^3d\mu=\frac{1}{3}\frac{\partial\Phi_0(z)}{\partial z}\end{aligned} \tag{7}$$

Allora ricordando che $\sigma_{sl} = \bar{\mu}_0 \sigma_{s0}$, la (6) diventa:

$$\frac{1}{3}\frac{d\Phi_0\left(z\right)}{dz} + \left(\Sigma - \bar{\mu}_0\Sigma_s\right)\Phi_1\left(z\right) \Longrightarrow \Phi_1\left(z\right) = -\frac{1}{3}\frac{1}{\Sigma - \bar{\mu}_0\Sigma_s}\frac{d\Phi_0\left(z\right)}{dz} \tag{8}$$

Segue

$$\frac{1}{3}\frac{1}{\Sigma_a + \Sigma_s - \bar{\mu}_0\Sigma_s}\frac{d^2\Phi_0\left(z\right)}{dz^2} - \Sigma_a\Phi_0\left(z\right) + S_0\left(z\right) = 0 \tag{9}$$

con $\Sigma_a = \Sigma_s$ e $\frac{1}{\Sigma_s} = \lambda_s$ scriveremo:

$$\frac{1}{3}\frac{\lambda_s}{1 - \bar{\mu}_0}\frac{d^2\Phi_0\left(z\right)}{dz^2} - \Sigma_a\Phi_0\left(z\right) + S_0\left(z\right) = 0 \tag{10}$$

dove

$$\frac{1}{3}\frac{\lambda_s}{\left(1 - \bar{\mu}_0\right)} = \frac{\lambda_{tr}}{3} = D = \text{coefficiente di diffusione} \tag{11}$$

Quindi l'*equazione di diffusione*

$$D\frac{d^2\Phi_0\left(z\right)}{dz^2} - \Sigma_a\Phi_0\left(z\right) + S_0\left(z\right) = 0 \tag{12}$$

ritrovata come caso particolare dell'*equazione di Boltzmann.*