Appunti di Fisica del Reattore nucleare

Ing. Giorgio Bertucelli - (file scaricato da http://www.extrabyte.info)

1 Equazione di Boltzmann

Come abbiamo stabilito nei numeri precedenti, il flusso è in generale funzione del vettore posizione $\mathbf{x}$, del tempo t, dell'energia E, del versore velocità $\mathbf{\Omega}$: $\Phi = \Phi(\mathbf{x}, E, \mathbf{\Omega}, t)$.

La variazione di densità neutronica nell'unità di tempo è

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \text{produzione} \begin{cases} \text{sorgente esterna } S(\mathbf{x}, E, \mathbf{\Omega}, t) \\ \text{collisioni di fissione} \end{cases} - \tag{1}$$

$$- \text{rimozione} \begin{cases} \text{perdite} \\ \text{assorbimento} \\ \text{collisioni} \end{cases}$$

$$\text{produzione} = \iint \Sigma_s(\mathbf{x}, E' \to E, \mathbf{\Omega}' \to \mathbf{\Omega}) \Phi(\mathbf{x}, E, \mathbf{\Omega}', t) \, dE' d\mathbf{\Omega}' \tag{2}$$

che si interpreta così: essa dà il flusso nella posizione $\mathbf{x}$ al tempo di neutroni, che per effetto dello scattering sono passati da un'energia E' con direzione di velocità $\mathbf{\Omega}'$ ad un'energia E con direzione di velocità $\mathbf{\Omega}$.

$$\text{perdite} = \operatorname{div} \mathbf{J}(\mathbf{x}, E, \mathbf{\Omega}, t) = \operatorname{div}[\mathbf{\Omega}\Phi(\mathbf{x}, E, \mathbf{\Omega}, t)] = \mathbf{\Omega} \cdot \operatorname{grad} \Phi(\mathbf{x}, E, \mathbf{\Omega}, t) \tag{3}$$

$$\text{assorbimento} = \Sigma_a(\mathbf{x}, E, \mathbf{\Omega}, t) \Phi(\mathbf{x}, E, \mathbf{\Omega}, t) \tag{4}$$

$$\text{collisioni} = \Sigma_s(\mathbf{x}, E, \mathbf{\Omega}, t) \Phi(\mathbf{x}, E, \mathbf{\Omega}, t) \tag{5}$$

Allora l'equazione di Boltzmann è la seguente:

$$\frac{1}{v}\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\mathbf{\Omega} \cdot \operatorname{grad} \Phi(\mathbf{x}, E, \mathbf{\Omega}, t) - (\Sigma_s + \Sigma_a)\Phi + S(\mathbf{x}, E, \mathbf{\Omega}, t) + \tag{6}$$
$$+ \iint \Sigma_s(\mathbf{x}, E' \to E, \mathbf{\Omega}' \to \mathbf{\Omega}) \Phi(\mathbf{x}, E, \mathbf{\Omega}', t) \, dE' d\mathbf{\Omega}'$$

Le sezioni d'urto in un mezzo non omogeneo sono in generale funzioni della posizione.

Caso 1 - Stato stazionario, monodimensionale, neutroni monoenergetici. Si ha allora :

$$-\cos\theta \frac{\partial \Phi(z, \mathbf{\Omega})}{\partial z} + \Sigma\Phi(z, \mathbf{\Omega}) = \int d\Omega' \Sigma_s(\mathbf{\Omega}' \to \mathbf{\Omega}) \Phi(z, \mathbf{\Omega}') + S(z, \mathbf{\Omega}) \tag{7}$$

In coordinate sferiche ponendo $-\cos\theta = \mu$ si ha $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi = d\mu d\varphi$. Moltiplicando ambo i membri della (7) per $d\varphi$, si ottiene:

$$\int_0^{2\pi} \Omega_z \frac{\partial \Phi}{\partial z} d\varphi + \int_0^{2\pi} \Sigma\Phi d\varphi = \int_0^{2\pi} S(z, \mathbf{\Omega}) \, d\varphi + \int_0^{2\pi} \int d\Omega' \Sigma_s(\mathbf{\Omega}' \to \mathbf{\Omega}) \Phi(z, \mathbf{\Omega}') \, d\varphi \tag{8}$$

Il versore Ω è: $\Omega = \Omega(\theta, \varphi)$ oppure $-\cos\theta = \mu = \Omega_z$ (fig. 1); si ha: $\Omega = \Omega(\mu, \varphi)$.

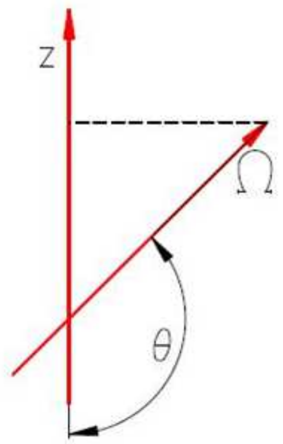

Figura 1: Analisi del caso 1: stato stazionario, monodimensionale, neutroni monoenergetici.

Allora il flusso $\Phi(z,\Omega)$ diventa $\Phi(z,\mu,\varphi)$, una volta integrato in $d\varphi$ rimane $\Phi(z,\mu)$, cioè:

$$\Phi(z,\mu)=\int_0^{2\pi}\Phi(z,\Omega(\mu,\varphi))\,d\varphi \tag{9}$$

Segue

$$\mu\frac{\partial\Phi(z,\mu)}{\partial z}+\Sigma\Phi(z,\mu)=S(z,\mu)+\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{+1}\Sigma_s(\mu'\to\mu)\,\Phi(z,\mu')\,d\mu'd\varphi$$

dove $d\mu'd\varphi=d\Omega'$. Ricordiamo cos'è la sezione trasversale di dispersione (scattering cross-section):

$$\frac{\text{Q.tà di reazioni osservate}}{\text{cm}^2\cdot\text{s}}=\sigma_s\frac{\text{Q.tà nuclei bersaglio}}{\text{cm}^2}\cdot\frac{nv=\Phi\text{ di particelle incidenti}}{\text{cm}^2\cdot\text{s}} \tag{10}$$

$$\text{sezione d'urto macroscopica}=\Sigma_s=N\sigma_s, \tag{11}$$

dove

$$N=\frac{\text{numero di atomi del nuclide}}{\text{cm}^3} \tag{12}$$

$$\text{La }\sigma_s\text{ dipende da}\begin{cases}\text{energia iniziale }E'\text{ (prima della collisione)}\\ \text{energia finale }E\text{ (dopo la collisione}\\ \text{angolo di scattering }\theta_0\text{ formato dalle direzioni dei versori }\mathbf{\Omega}\text{ e }\mathbf{\Omega}'\end{cases}$$

In coordinate polari scriveremo

$$\cos\theta_0=\mathbf{\Omega}\cdot\mathbf{\Omega}'=\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi-\varphi')$$

Ponendo $\cos\theta_0=\mu_0$ sarà

$$\sigma_s=\sigma_s(\mu_0)$$

che può essere espressa da una serie di armoniche sferiche (polinomi di Legendre):

$$\sigma_s(\mu_0)=\sum_{l=0}^{+\infty}\frac{2l+1}{2}\sigma_{sl}P_l(\mu_0) \tag{13}$$

Alcuni polinomi di Legendre:

$$\begin{aligned} P_0(\mu_0) &= 1 \\ P_1(\mu_0) &= \mu_0 \\ P_2(\mu_0) &= \frac{1}{2}\left(3\mu_0^2 - 1\right) \\ &\ldots \end{aligned} \tag{14}$$

Con le condizioni di ortogonalità dei polinomi di Legendre si calcolano i coefficienti σ_{sl}:

$$\int_{-1}^{+1} P_m(\mu_0)\,\sigma_s(\mu_0)\,d\mu_0 = \int_{-1}^{+1}\sum_{l=0}^{+\infty}\frac{2l+1}{2}\sigma_{sl}P_m(\mu_0)\,P_l(\mu_0)\,d\mu_0 \tag{15}$$

dove

$$\int_{-1}^{+1} P_m(\mu_0)\,P_l(\mu_0)\,d\mu_0 = \begin{cases} 0, \text{ se } & m \neq l \\ \frac{2l+1}{2}, & \text{se } m = l \end{cases} \tag{16}$$

e per tali posizioni si ha:

$$\int_{-1}^{+1} P_m(\mu_0)\,P_l(\mu_0)\,d\mu_0 = \sigma_l. \tag{17}$$

$$.\begin{cases} l = 0 \Longrightarrow \sigma_{s0} = \int_{-1}^{+1} 1 \cdot P_l(\mu_0)\,d\mu_0 = \int_{-1}^{+1} P_l(\mu_0)\,d\mu_0 \quad \text{sezione d'urto totale} \\ l = 1 \Longrightarrow \sigma_{sl} = \int_{-1}^{+1} \mu_0 P_l(\mu_0)\,d\mu_0 = \overline{\mu_0}\ \sigma_{s0} \quad \overline{\mu_0} = \text{coseno medio di scattering} \\ l \geq i = 2, 3, \ldots \Longrightarrow \text{si hanno i valori di sezione d'urto che rappresentano} \\ \text{i diversi gradi di anisotropia} \end{cases}$$

L'espressione generale di $P_l(\mu_0)$ è:

$$P_l(\mu_0) = P_l(\mu)\,P_l(\mu') + 2\sum_{m=1}^{l}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}P_l^m(\mu)\,P_l^m(\mu')\cos[m(\varphi - \varphi')]$$

Per quanto precede σ_s è funzione di μ_0: $\sigma_s(\mathbf{\Omega}\cdot\mathbf{\Omega}') = \sigma_s(\cos\theta_0)$ in un range di $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Integriamo in $d\varphi$ la $\sigma_s(\Omega'(\theta',\varphi') \to \Omega(\theta,\varphi))$:

$$\int_0^{2\pi} \sigma_s(\Omega'(\theta',\varphi') \to \Omega(\theta,\varphi))\,d\varphi = 2\pi\sigma_s(\Omega'(\theta',\varphi') \to \Omega(\theta,\varphi)) = \sigma_s(\mu_0) \tag{18}$$

Perciò si ha:

$$\sigma_s(\Omega \to \Omega) = \frac{1}{2\pi}\sigma_s(\mu_0)\sum_{l=0}^{+\infty}\frac{2l+1}{2}\sigma_{sl}P_l(\mu_0) = \tag{19}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{l=0}^{+\infty}\frac{2l+1}{2}\sigma_{sl}\left[P_l(\mu)\,P_l(\mu') + 2\sum_{m=1}^{l}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}P_l^m(\mu)\,P_l^m(\mu')\cos[m(\varphi-\varphi')]\right]$$

che sostituita nell'equazione di Boltzmann e integrando rispetto a φ e φ':

$$\mu\frac{\partial\Phi(z,\mu)}{\partial x} + \Sigma\Phi(z,\mu) = S(z,\mu) + \sum_{l=0}^{+\infty}\frac{2l+1}{2}N\sigma_{sl}P_l(\mu)\int_{-1}^{+1} P_l(\mu')\,\Phi(z,\mu')\,d\mu' \tag{20}$$

Per integrare questa equazione sviluppiamo in armoniche sferiche le funzioni $\Phi(z,\mu)$ e $S(z,\mu)$:

$$\begin{cases} \Phi(z,\mu) = \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{2l+1}{2} \Phi_l(z) P_l(\mu) \\ S(z,\mu) = \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{2l+1}{2} S_l(z) P_l(\mu) \end{cases} \tag{21}$$

Con le condizioni di ortogonalità dei polinomi di Legendre si ricavano i coefficienti $\Phi_l(z)$ e $S_l(z)$:

$$\begin{cases} \int_{-1}^{+1} P_m(\mu)\Phi(z,\mu)\,d\mu = \int_{-1}^{+1} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{2l+1}{2} \Phi_l(z) P_l(\mu) P_m(\mu)\,d\mu \\ \int_{-1}^{+1} P_m(\mu) S(z,\mu)\,d\mu = \int_{-1}^{+1} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{2l+1}{2} S_l(z) P_l(\mu) P_m(\mu)\,d\mu \end{cases} \text{con la posizione che} \tag{22}$$

$$\int_{-1}^{+1} P_l(\mu) P_m(\mu)\,d\mu = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq l \\ \frac{2l+1}{2}, & \text{se } m = l \end{cases} \quad \text{Allora quando } m = l \text{ si ha} \tag{23}$$

$$\begin{cases} \int_{-1}^{+1} \Phi(z,\mu) P_l(\mu)\,d\mu = \Phi_l(z) \\ \int_{-1}^{+1} S(z,\mu) P_l(\mu)\,d\mu = S_l(z) \end{cases} \tag{24}$$

$$\begin{cases} \text{per } l = 0 \text{ si ha } \int_{-1}^{+1} \Phi(z,\mu)\,d\mu = \Phi_0(z) \ \text{ ossia il flusso è funzione della sola } z \\ \text{per } l = 1 \text{ si ha } \int_{-1}^{+1} \mu\Phi(z,\mu)\,d\mu = \Phi_1(z) = \bar{\mu}\Phi_0(z) \ \text{ dove } \bar{\mu} = M(\mu) \ \text{ valor medio} \end{cases} \tag{25}$$

Allora è

$$\Phi(z,\mu) = \frac{1}{2}\Phi_0(z) + \frac{3}{2}\Phi_1(z)\mu + ... = \frac{1}{2}\Phi_0(z) + \frac{3}{2}\Phi_1(z)\bar{\mu} \tag{26}$$