Appunti di Fisica del Reattore nucleare

Ing. Giorgio Bertucelli - (file scaricato da http://www.extrabyte.info)

Esempio 3 – Stato non stazionario, mezzo infinito, sorgente piana infinita.
L'**equazione di diffusione** è

$$\frac{1}{v}\frac{\partial \Phi}{\partial t} = D\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \Sigma_a \Phi + \delta(x)\,\delta(t) \tag{1}$$

Per la sua integrazione ricorriamo alla trasformata di Laplace e alla trasformata di Fourier; ricordiamo che

$$L[f(t)] = g(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\,dt, \quad \text{dove } s = \alpha + i\beta \tag{2}$$

e per antitrasformare ricorderemo la formula di Riemann:

$$L^{-1}[g(s)] = f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} g(s)\,ds \tag{3}$$

$$L[f'(t)] = sL[f(t)] - f(0) \tag{4}$$

Per ciò che riguarda la trasformata di Fourier, ricordiamo che una funzione generalmente continua e assolutamente integrabile, i.e.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |V(x)|\,dx < +\infty$$

può essere posta nella forma

$$V(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega)\,e^{i\omega x} d\omega, \tag{5}$$

in cui

$$f(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} V(x)\,e^{-i\omega x} d\omega \tag{6}$$

è la **trasformata di Fourier** di $V(x)$. Per una funzione $f(u)$ si ha:

$$g(s) = L[f(u)] = \int_0^{+\infty} f(u)\,e^{-su} du \quad \text{trasformata di Laplace} \tag{7}$$

$$g(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,e^{-i\omega u} d\omega \quad \text{trasformata di Fourier}$$

Tali trasformate divengono molto simili se si pone $s = i\omega$. La differenza sostanziale consiste nel percorso di integrazione: negli integrali di Fourier l'integrazione è eseguita lungo l'asse immaginario del piano complesso della variabile s della trasformata di Laplace. Il metodo di Fourier è più generale, perché la $f(u)$ non deve necessariamente soddisfare la condizione di essere nulla per $u < 0$ come richiesto dal metodo di Laplace. Nel caso in esame, il flusso neutronico è funzione dello spazio e del tempo: $0 \leq t < +\infty$, $-\infty < x < +\infty$. Trasformeremo secondo Laplace rispetto al tempo t e secondo Fourier rispetto allo spazio x.

$$\frac{1}{v}L\left[\frac{\partial \Phi(x,t)}{\partial t}\right] = DL\left[\frac{\partial^2 \Phi(x,t)}{\partial^2 x}\right] - \Sigma_a L[\Phi(x,t)] + \delta(x)\,L[\delta(t)] \tag{8}$$

$$\frac{1}{v}\left\{sL\left[\Phi\left(x,t\right)\right]-\Phi\left(x,0\right)\right\}=D\frac{\partial^2\Phi_1\left(x,s\right)}{\partial^2 x}-\Sigma_a\Phi_1\left(x,s\right)+\delta\left(x\right) \tag{9}$$

Si abbia $\Phi\left(x,0\right)=0$

$$\frac{s}{v}\Phi_1\left(x,s\right)=D\frac{\partial^2\Phi_1\left(x,s\right)}{\partial^2 x}-\Sigma_a\Phi_1\left(x,s\right)+\delta\left(x\right) \tag{10}$$

La trasformata di Fourier di $\Phi\left(x\right)$ è

$$f\left(\omega\right)=\Phi_2\left(\omega\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi\left(x\right)e^{-i\omega x}dx, \tag{11}$$

dove

$$\Phi\left(x\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f\left(\omega\right)e^{i\omega x}d\omega \tag{12}$$

$$\frac{\partial\Phi\left(x\right)}{\partial x}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}i\omega f\left(\omega\right)e^{i\omega x}d\omega\Longrightarrow\frac{\partial^2\Phi\left(x\right)}{\partial x^2}=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\omega^2 f\left(\omega\right)e^{i\omega x}d\omega \tag{13}$$

e dunque trasformando la (10) secondo Fourier si ha:

$$\frac{s}{v}\Phi_2\left(\omega,s\right)=-D\omega^2\Phi_2\left(\omega,s\right)-\Sigma_a\Phi_2\left(\omega,s\right)+1, \tag{14}$$

dalla quale si ottiene

$$\Phi_2\left(\omega,s\right)=\frac{1}{\frac{s}{v}+\omega^2 D+\Sigma_a} \tag{15}$$

Riscriviamo la (10) come segue:

$$D\frac{\partial^2\Phi_1\left(x,s\right)}{\partial x^2}-\left(\Sigma_a+\frac{s}{v}\right)\Phi_1\left(x,s\right)+\delta\left(x\right)=0 \tag{16}$$

e perciò trasformando secondo Laplace si ottiene l'equazione di diffusione con sezione d'urto di assorbimento fittizia pari a $\Sigma_a+\frac{s}{v}$. Trasformando invece secondo Fourier si ottiene una sezione d'urto di assorbimento fittizia costante, ragion per cui il flusso è costante. *Questa è l'interpretazione fisica delle due trasformate.* Scriviamo

$$\Phi_2\left(\omega,s\right)=\frac{1}{\frac{s}{v}+\omega^2 D+\Sigma_a}=\frac{v}{s+v\left(\Sigma_a+\omega^2 D\right)}\Longrightarrow c=\Sigma_a+\omega^2 D \tag{17}$$

$$L^{-1}\left[\frac{v}{s+vc}\right]=vL^{-1}\left[\frac{1}{s+vc}\right]=ve^{-vct}=v\exp\left[-v\left(\Sigma_a+\omega^2 D\right)t\right]=\Phi^{(1)}\left(\omega,t\right) \tag{18}$$

Antitrasformando secondo Fourier si ha:

$$\Phi\left(x,t\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi^{(1)}\left(\omega,t\right)e^{i\omega x}d\omega=\frac{ve^{-v\Sigma_a t}}{\sqrt{4\pi D_0 t}}\exp\left(-\frac{x^2}{4D_0 t}\right) \tag{19}$$

dove

$$D_0=\frac{v}{3\Sigma_s}$$

Come si vede $\Phi(x,t)$ è una funzione pari in x fissato e $t>0$. Le condizioni al contorno sono:

$$\begin{aligned}\Phi(-\infty,t)=0, &\quad \Phi(+\infty,t)=0 \\ \Phi(x,0)=0, &\quad \Phi(x,t\to+\infty)=0\end{aligned} \tag{20}$$

Se l'assorbimento fosse nullo si avrebbe:

$$\Phi(x,t)=\frac{v}{\sqrt{4\pi D_0 t}}\exp\left(-\frac{x^2}{4D_0 t}\right) \tag{21}$$