Appunti di Fisica del Reattore nucleare

Ing. G. Bertucelli - (file scaricato da http://www.extrabyte.info)

Esempio 1 – Stato stazionario, mezzo infinito, sorgente puntiforme.

Esprimiamo il flusso Φ in funzione soltanto di r, scriviamo il laplaciano di $\Phi(r,\theta,\varphi)$, cioè in coordinate sferiche. Tenendo conto che Φ dipende solo dalla coordinata radiale (scattering isotropo, i.e. a simmetria sferica), si ha:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} \tag{1}$$

Si ha così:

$$D\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right) - \Sigma_a \Phi + S(r) = 0 \tag{2}$$

Una sorgente puntiforme è *deltiforme* ossia esprimibile attraverso la funzione delta di Dirac:

$$\delta(r) = 0,\ r \neq 0; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(r)\, dr = 1 \tag{3}$$

Più precisamente

$$S(r) = S\delta(r), \tag{4}$$

dove S =neutroni emessi/s. Assumendo $S=1$

$$D\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right) - \Sigma_a \Phi + \delta(r) = 0 \tag{5}$$

Per $r \neq 0$

$$\frac{d^2 \Phi}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\Phi}{dr} - \Sigma_a \frac{\Phi}{D} = 0 \tag{6}$$

Poniamo

$$\frac{\Sigma_a}{D} = \frac{1}{L^2} = \chi^2$$

nota come **lunghezza di diffusione**. Con tale posizione la (6) si riscrive:

$$\frac{d^2 \Phi}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\Phi}{dr} - \chi^2 = 0 \tag{7}$$

Le condizioni al contorno per tale equazione differenziale sono:

$$a)\quad \Phi(r) > 0 \text{ e finito;} \quad b)\quad \lim_{r\to 0} 4\pi r^2 J(r) = 1$$

ove la condizione b) è valida per una sorgente puntiforme ed emissione =1 neutrone. Poniamo

$$\frac{d\Phi}{dr} = -\frac{u}{r^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} \Longrightarrow \frac{d^2\Phi}{dr^2} = \frac{2u}{r^3} - \frac{2}{r^2}\frac{du}{dr} + \frac{1}{r}\frac{d^2u}{dr^2},$$

che sostituita nella (7) dà

$$\frac{d^2 u}{dr^2} - \chi^2 = 0 \tag{8}$$

il cui integrale generale è

$$u = Ae^{-\chi r} + Be^{\chi r} \tag{9}$$

e dunque

$$\Phi = \frac{A}{r}e^{-\chi r} + \frac{B}{r}e^{\chi r}$$

Per la condizione al contorno a) deve essere $B = 0$, perché $e^{\chi r}$ farebbe $\Phi \to +\infty$ per $r \to +\infty$. Quindi

$$\Phi = \frac{A}{r}e^{-\chi r} \tag{10}$$

Calcoliamo la densità di corrente neutronica $J(r)$:

$$J(r) = -D\frac{d\Phi}{dr} = -D\frac{d}{dr}\left(\frac{A}{r}e^{-\chi r}\right) = DA\frac{e^{-\chi r}}{r^2}(\chi r + 1) \tag{11}$$

Applicando la condizione b) si ottiene:

$$\lim_{r\to 0} 4\pi r^2 DA\frac{e^{-\chi r}}{r}(\chi r + 1) = \lim_{r\to 0} 4\pi DAe^{-\chi r}(\chi r + 1) = 1 \tag{12}$$

$$\Longrightarrow 4\pi DA = 1 \Longrightarrow A = \frac{1}{4\pi D}$$

Dunque l'integrale generale è

$$\Phi(r) = \frac{1}{4\pi D}\frac{e^{-\chi r}}{r} \tag{13}$$

Esempio 2 – Stato stazionario, mezzo infinito, sorgente piana infinita.

$$D\frac{d^2\Phi}{dr^2} - \Sigma_a\Phi + S(x) = 0 \tag{14}$$

dove

$$S(x) = \delta(x) \quad \text{delta di Dirac} \tag{15}$$

Le condizioni al contorno:

$$a) \;\; \Phi(x) > 0 \text{ e finito;} \;\; \lim_{x\to 0} J(x) = \frac{1}{2} \tag{16}$$

Allora per $x > 0$ possiamo scrivere:

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} - \chi^2\Phi = 0, \tag{17}$$

il cui integrale generale è

$$\Phi(x) = Ae^{-\chi x} + Be^{\chi x} \tag{18}$$

che per la condizione a) deve avere $B = 0$ e dunque

$$\Phi(x) = Ae^{-\chi x} \Longrightarrow J(x) = -D\frac{d\Phi}{dx} = -D\frac{d}{dx}\left(Ae^{-\chi x}\right) = -DA\chi e^{-\chi x} \tag{19}$$

Segue

$$\lim_{x\to 0}\left(-DA\chi e^{-\chi x}\right) = \frac{1}{2} \Longrightarrow A = \frac{1}{2D\chi} \tag{20}$$

Così l'integrale generale è:

$$\Phi(x) = \frac{e^{-\chi x}}{2D\chi} \tag{21}$$

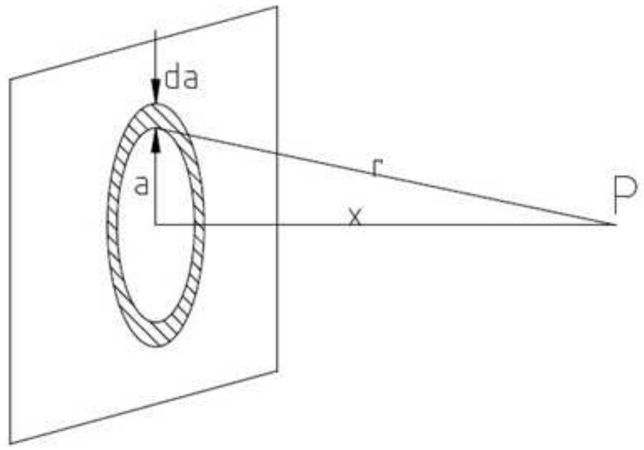

Figura 1: Una sorgente piana infinita può essere pensata come il continuo di infinite sorgenti puntiformi.

Questo integrale si ottiene dimostrando che una sorgente $S(x)$ piana e infinita è il continuo di infinite sorgenti puntiformi, come rappresentato in fig. 1.

La densità di corrente attraverso l'area tratteggiata è

$$\frac{\Phi(r)}{2\pi a \cdot da}, \tag{22}$$

mentre il numero di neutroni che l'attraversano è:

$$\frac{\Phi(r)}{2\pi a \cdot da}, \quad \text{dove } r = \sqrt{x^2 + a^2} \tag{23}$$

Integrando per $0 \leq a < +\infty$ si ottiene

$$\Phi(x) = \int_0^{+\infty} \Phi\left(\sqrt{x^2 + a^2}\right) 2\pi a \cdot da = \int_x^{+\infty} \Phi(r)\, 2\pi r \cdot da \tag{24}$$

Ricordiamo la (13):

$$\Phi(r) = \frac{1}{4\pi D} \frac{e^{-\chi r}}{r}$$

Quindi sostituendo si ha:

$$\Phi(x) = \int_x^{+\infty} \frac{1}{4\pi D} \frac{e^{-\chi r}}{r} 2\pi r \cdot da = \int_x^{+\infty} \frac{1}{2D} e^{-\chi r} da = \frac{e^{-\chi x}}{2D\chi}, \tag{25}$$

dove

$$\chi = \sqrt{\frac{\Sigma_a}{D}} \tag{26}$$