Appunti di Fisica del Reattore nucleare

Ing. G. Bertucelli - (file scaricato da http://www.extrabyte.info)

1 Metodo del Kernel (seconda parte)

2° Caso - Ammettiamo che vi sia un certo assorbimento neutronico nel mezzo moderante; quindi $\Sigma_a \neq 0$. Supponiamo inoltre che Σ_a sia piccola, tale che si possa pensare leggermente variabile la legge di distribuzione della densità neutronica; quindi si è passati da un fenomeno descritto da una retta ad un altro descritto da una curva. Richiamiamo la legge di Fick (§ **??**):

$$\mathbf{J} = -D \, \mathrm{grad} \, \Phi \tag{1}$$

dove:

$\mathbf{J}$ = vettore densità di corrente neutronica
D = coefficiente di diffusione
Φ =flusso di neutroni

Il segno meno sta ad indicare che in un elemento di volume dV si ha una diminuzione di densità neutronica. All'ipotesi di Σ_a piccola, aggiungeremo che i neutroni siano monoenergetici, lo scattering isotropo nel sistema del laboratorio, lievi variazioni di Φ nell'intorno di due o tre cammini liberi medi. Attraverso una superficie di area S passano $J \cdot S$ neutroni/s provenienti da P'. I neutroni di scattering che attraversano la superficie $S \cos\theta$ sono:

$$\Sigma_s (\mathbf{x} + \mathbf{r}) \, \Phi \left(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t - \frac{r}{v} \right) S \cos\theta \Longrightarrow \tag{2}$$

$$J \cdot S = \int \Sigma_s (\mathbf{x} + \mathbf{r}) \, \Phi \left(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t - \frac{r}{v} \right) S \cos\theta \cdot \frac{1}{4\pi r^2} \exp \left[-r \int_0^1 \Sigma_s (\mathbf{x} + \xi \mathbf{r}) \right] dr$$

$$J = \int \Sigma_s (\mathbf{x} + \mathbf{r}) \, \Phi \left(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t - \frac{r}{v} \right) \cos\theta \cdot \frac{1}{4\pi r^2} \exp \left[-r \int_0^1 \Sigma_s (\mathbf{x} + \xi \mathbf{r}) \right] dr$$

Avendo supposto che Φ sia leggermente variabile, sviluppiamolo in serie di Taylor arrestandoci al secondo termine:

$$\Phi \left(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t - \frac{r}{v} \right) = \Phi (\mathbf{x}, t) + \mathbf{r} \cdot \mathrm{grad} \, \Phi (\mathbf{x}, t) - \frac{r}{v} \frac{\partial \Phi (\mathbf{x}, t)}{\partial t} + ...$$

Per l'omogeneità del mezzo scriveremo

$$\mathbf{J} (\mathbf{x}, t) = \frac{\Sigma_s (\mathbf{x})}{4\pi} \int_0^{+\infty} dt \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \sin\theta \cos\theta e^{-\Sigma_s(\mathbf{x})} \left\{ \begin{array}{c} \Phi + r \sin\theta \cos\theta \frac{\partial \Phi}{\partial x} + r \sin\theta \sin\varphi \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \\ + r \cos\theta \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{r}{v} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \end{array} \right. \tag{3}$$

Supposte le variazioni di flusso in direzione z per cui $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0$, sviluppando i calcoli si ottiene:

$$\mathbf{J}_{-} (\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4} \frac{\Sigma_s}{\Sigma} \Phi + \frac{\Sigma_s}{\Sigma^2} \left(\frac{1}{6} \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{1}{4v} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \tag{4}$$

$$\mathbf{J}_{+} (\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4} \frac{\Sigma_s}{\Sigma} \Phi + \frac{\Sigma_s}{\Sigma^2} \left(-\frac{1}{6} \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{1}{4v} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)$$

Allora le componenti del vettore $\mathbf{J}$ secondo x, y, z sono rispettivamente:

$$J_x = -\frac{\Sigma_s}{3\Sigma^2} \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad J_y = -\frac{\Sigma_s}{3\Sigma^2} \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad J_z = J_{+} - J_{-} = -\frac{\Sigma_s}{3\Sigma^2} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \tag{5}$$

per cui

$$\mathbf{J} = J_x\mathbf{i} + J_y\mathbf{j} + J_z\mathbf{k} \Longrightarrow \mathbf{J} = -\frac{\Sigma_s}{3\Sigma^2}\,\mathrm{grad}\,\Phi, \tag{6}$$

onde

$$D = \frac{\Sigma_s}{3\Sigma^2} = \frac{\Sigma_s}{3\left(\Sigma_s + \Sigma_a\right)^2} = \frac{\Sigma_s}{3\left(\Sigma_s^2 + 2\Sigma_s + \frac{\Sigma_a^2}{\Sigma_s}\right)}$$

e ricordando l'ipotesi $\Sigma_a = \Sigma_s$

$$D = \frac{1}{3\Sigma_s} \tag{7}$$

Denotando con n la densità del numero di neutroni i.e. il numero di neutroni per unità di volume, e con v la velocità dei neutroni, si ha $\Phi = nv$, cosicché

$$\mathbf{J} = -\frac{1}{3\Sigma^2}\,\mathrm{grad}\,(nv) \tag{8}$$

In un mezzo isotropo v è costante:

$$\mathbf{J} = -\frac{v}{3\Sigma^2}\,\mathrm{grad}\,(n) = -D_0\,\mathrm{grad}\,(n) \tag{9}$$

2 Equazione di diffusione

Ricordando l'*equazione di Boltzmann di trasporto*, già incontrata nell'introduzione, possiamo scrivere:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \text{produzione} \;-\; \text{assorbimento} \;-\; \text{perdite} \tag{10}$$

in cui abbiamo:

- produzione $= S\left(\mathbf{x}, t\right)$ per la presenza di sorgenti esterne al mezzo;
- assorbimento $= \Sigma_a\Phi\left(\mathbf{x}, t\right)$, dove Σ_a è la sezione d'urto macroscopica di assorbimento;
- perdite (leakage) $= -D \cdot \nabla^2\Phi$

La perdita si ricava nel modo seguente. Si consideri il volume elementare $dV = dxdydz$; il flusso totale nella direzione z attraverso la superficie $dxdy$ è

$$\left(J_z + \frac{\partial J_z}{\partial z}\right)dxdy - J_z dxdy = \frac{\partial J_z}{\partial z}dxdydz = -D\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}dxdydz \tag{11}$$

In modo analogo per gli assi x, y. Ricordando il teorema della divergenza (o teorema di Gauss):

$$\Phi = \int_S \mathbf{J}\cdot\mathbf{n}dS = \int_V \mathrm{div}\,\mathbf{J}dV = \int_V \mathrm{div}\left(-D\,\mathrm{grad}\,\Phi\right)dV = -D\nabla^2\Phi$$

che rappresenta la perdita. La (10) diventa così

$$\frac{\partial n}{\partial t} = S\left(\mathbf{x}, t\right) - \Sigma_a\Phi\left(\mathbf{x}, t\right) + D\nabla^2\Phi \tag{12}$$

Il coefficiente di diffusione D ha il valore espresso nel caso di scattering isotropo nel sistema del laboratorio, ma cambia il suo valore qualora si manifesti una anisotropia nella direzione della velocità. Intuitivamente si capisce che nei mezzi pesanti, ossia aventi nuclei pesanti e liberi, lo scattering è isotropo con buona approssimazione possiamo accettare che lo sia. Mentre con nuclei leggeri lo scattering è anisotropo, cioè la direzione della velocità del neutrone tende a scostarsi dalla direzione che aveva prima dello collisione. Con tali considerazioni, che verranno meglio precisate in seguito, si intuisce che in mezzi leggeri, godendo la velocità di direzioni privilegiate, aumenta la densità di corrente neutronica $\mathbf{J}$ in corrispondenza della quale aumenta D ossia Σ_s. La correzione che si apporta a D a causa dell'anisotropia fa uso della grandezza

$$\bar{\mu}_0 = \overline{\cos\psi} = \frac{2}{3A} = \text{coseno medio di scattering,} \tag{13}$$

dove A =numero di massa del mezzo bersaglio. In questo caso D assume il valore

$$D = \frac{1}{3\Sigma_s\left(1-\bar{\mu}_0\right)} = \frac{\lambda_s}{3\left(1-\bar{\mu}_0\right)} = \frac{\lambda_{tr}}{3} \tag{14}$$

$$\Longrightarrow \lambda_{tr} = \frac{1}{\Sigma_s\left(1-\bar{\mu}_0\right)} = \text{ percorso libero medio di trasporto}$$

e sempre che sia $\Sigma_a = 1$. Nel caso in cui si volesse tener conto dell'assorbimento il coefficiente D assume il valore:

$$D = \frac{1}{3\Sigma_s\left(1-\bar{\mu}_0\right)\left(1-\frac{4}{5}\frac{\Sigma_a}{\Sigma}+\frac{\Sigma_a}{\Sigma}\frac{\bar{\mu}_0}{1-\bar{\mu}_0}+...\right)} \tag{15}$$

Le condizioni di integrabilità dell'equazione di diffusione sono

$$\Phi \geq 0, \quad J_A = J_B$$

La seconda condizione è presto dimostrata. Deve essere (fig. 1):

$$\begin{cases} J_A^+ = J_B^- \\ J_A^- = J_B^+ \end{cases} \Longrightarrow J_A^+ - J_A^- = J_B^+ - J_B^- \Longrightarrow J_A = J_B$$

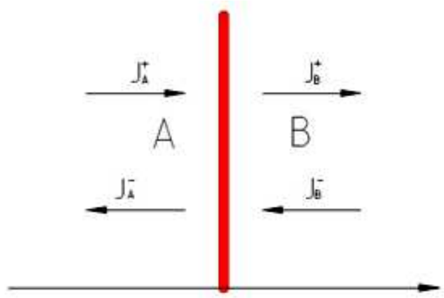

Figura 1: Condizioni di integrabillità dell'equazione di diffusione.

Per la prima condizione, immaginiamo che B sia il vuoto e che Φ vari come in fig.2, da cui si evidenzia:

$$\Phi\left(0\right) = \Phi_0, \quad \left(\frac{d\Phi}{dx}\right)_{x=0} = -\frac{\Phi_0}{d} \Longrightarrow d = -\frac{\Phi_0}{\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)_{x=0}} \tag{16}$$

Ricordando le (4):

$$J_- = \frac{\Phi_0}{4} + \frac{\lambda_{tr}}{6}\frac{d\Phi}{dx} = 0 \Longrightarrow d = \frac{2}{3}\lambda_{tr} \tag{17}$$

In seguito supporemo $\Phi\left(d\right) = 0$.

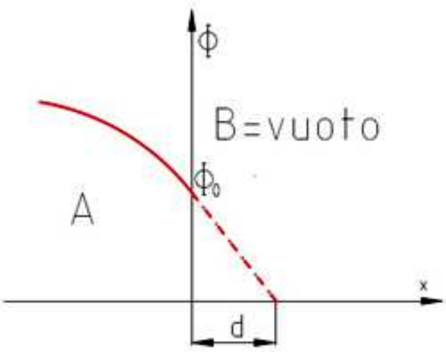

Figura 2: Condizioni di integrabillità dell'equazione di diffusione.