Densità di corrente di neutroni. Equazione del bilancio

Marcello Colozzo - (file scaricato da http://www.extrabyte.info)

Nel numero precedente abbiamo definito il flusso di neutroni $\Phi(\mathbf{x}, t)$ come il numero di neutroni che attraversano l'unità di superficie nell'unità di tempo. Possiamo dunque associare a tale campo scalare la grandezza vettoriale *densità di corrente* $\mathbf{j}(\mathbf{x}, t)$, tale che comunque prendiamo un elemento di superficie dS di versore normale $\mathbf{n}$, il prodotto scalare

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} dS \tag{1}$$

è pari al numero di neutroni che attraversano dS nell'unità di tempo. Ne segue il flusso elementare

$$d\Phi = \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} dS \tag{2}$$

Quindi

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \int_S \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} dS \tag{3}$$

Dall'Analisi vettoriale sappiamo che la grandezza $\Phi(\mathbf{x}, t)$ così definita, è il flusso del vettore $\mathbf{j}$ attraverso la superficie S. Nel caso particolare di una superficie chiusa, deve essere

$$\frac{dN_V}{dt} = -\Phi(\mathbf{x}, t) \tag{4}$$

dove $N_V(\mathbf{x}, t)$ è il numero di neutroni nel volume V racchiuso da S (fig. 1).

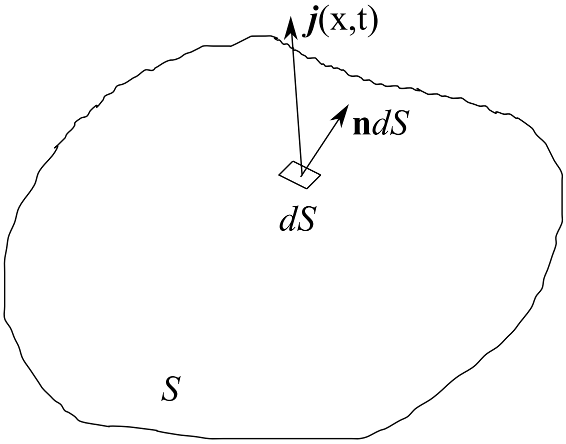

Figura 1: Il campo vettoriale $\mathbf{j}(x, t)$ definisce la densità di corrente neutronica, nel senso che il prodotto scalare è il numero di neutroni che attraversano dS nell'unità di tempo. Se il prodotto scalare è positivo, i neutroni "escono" dal volume V, attraverso dS. Nel caso contrario, entrano nel volume.

Infatti, se $N_V(\mathbf{x}, t)$ è monotonamente crescente in funzione del tempo t, ci deve essere un flusso entrante di neutroni cosicché il vettore $\mathbf{j}(\mathbf{x}, t)$ è (in media) orientato verso l'interno del volume e il prodotto scalare nell'integrando della 3 è negativo. La (4) è valida in assenza di processi di creazione/assorbimento di neutroni. In quest'ultimo caso dobbiamo aggiungere una velocità di creazione/assorbimento $\Theta_V(t)$:

$$\frac{dN_V}{dt} = -\Phi(\mathbf{x}, t) + \Theta_V(t) \tag{5}$$

D'altra parte, se $n(\mathbf{x}, t)$ è la densità del numero di neutroni al tempo t:

$$\frac{d}{dt}\int_V n(\mathbf{x}, t)\, d^3x + \int_S \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} dS = \Theta_V(t) \tag{6}$$

La (6) è l'**equazione del bilancio** per il flusso di neutroni attraverso S. Tale equazione può essere riscritta in termini differenziali utilizzando il teorema della divergenza:

$$\int_S \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \operatorname{div} \mathbf{j}(\mathbf{x}, t)\, d^3x,$$

cosicché

$$\int_V \frac{\partial n}{\partial t} d^3x + \int_V \operatorname{div} \mathbf{j}(\mathbf{x}, t)\, d^3x = \int_V \gamma(\mathbf{x}, t)\, d^3x$$

avendo definito la *densità di velocità di creazione/assorbimento di neutroni*:

$$\Theta_V(t) = \int_V \gamma(\mathbf{x}, t)\, d^3x \tag{7}$$

Segue

$$\int_V \left[\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) + \gamma(\mathbf{x}, t)\right] d^3x = 0$$

L'arbitrarietà della superficie chiusa S e quindi, del volume V, implica

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) + \gamma(\mathbf{x}, t) = 0 \tag{8}$$

che è la predetta equazione del bilancio in forma differenziale. Tale equazione esprime localmente il bilancio tra neutroni entranti/uscenti e creati/assorbiti.