Metodo del Kernel

Ing. G. Bertucelli - (file scaricato da http://www.extrabyte.info)

Indichiamo con Σ_s e Σ_a le sezioni trasversali o sezioni d'urto rispettivamente di scattering e di assorbimento. La sezione d'urto totale sarà

$$\Sigma = \Sigma_s + \Sigma_a \tag{1}$$

Consideriamo un mezzo infinito, costituito da atomi pesanti, entro il quale viaggiano dei neutroni monoenergetici con diversa velocità, direzione e verso, la cui distribuzione sia isotropa. Il flusso neutronico sarà in funzione della posizione e del tempo $\Phi(\mathbf{s}, t)$ di dimensioni $\left[\frac{\text{neutroni}}{\text{cm}^2 \cdot \text{s}}\right]$. In un punto $P(x, y, z)$ al tempo t avremo neutroni di scattering e di assorbimento pari a:

$$\Phi(\mathbf{s}, t) \cdot \Sigma_s, \ \Phi(\mathbf{s}, t) \cdot \Sigma_a \tag{2}$$

I neutroni che subiscono scattering in P' sono $\Phi(\mathbf{s}', t) \cdot \Sigma_s$ (fig. 1).

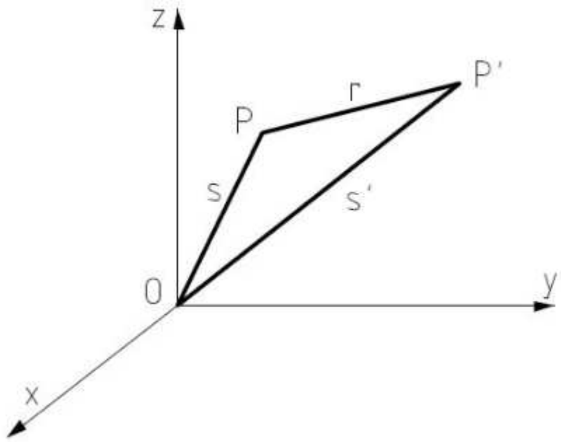

Figura 1: Scattering dei neutroni nel punto P'.

Per andare da P' a P i neutroni impiegano un tempo r/v (v =velocità) e dunque sarà

$$t - \frac{r}{v} = t'$$

La probabilità che avvenga uno scattering dando un incremento infinitesimo $d\mathbf{s}'$ è dunque:

$$\Phi\left(\mathbf{s}', t - \frac{r}{v}\right) \cdot \Sigma_s d\mathbf{s}' \tag{3}$$

Indicando con dA un elemento di superficie $\perp$ a $\mathbf{r}$ e tale che $dA \cdot dh = dV$ sia un elemento interno di P esprimiamo con il rapporto $\frac{dA}{4\pi r^2}$ la probabilità che i neutroni di scattering di P' attraversino la dA. Il numero complessivo di neutroni sarà dunque:

$$\frac{dA}{4\pi r^2} \cdot \Phi\left(\mathbf{s}', t - \frac{r}{v}\right) \cdot \Sigma_s d\mathbf{s}', \tag{4}$$

di cui solo una parte giunge in P, precisamente

$$\Phi(\mathbf{s}, t) = \int_V \Phi(\mathbf{s}', t) \frac{e^{-\Sigma s}}{4\pi r} \Sigma_s d\mathbf{s}' \tag{5}$$

dove $r = |\mathbf{s} - \mathbf{s}'|$. Alternativamente:

$$\Phi\left(\mathbf{s}, t\right) = \int_V \Phi\left(\mathbf{s} + \mathbf{r}, t - \frac{r}{v}\right) \frac{e^{-\Sigma r}}{4\pi r} \Sigma_s d\mathbf{r} \tag{6}$$

Questa è un'equazione rigorosa alle seguenti condizioni: scattering (o dispersione) a simmetria sferica in un mezzo omogeneo ed esteso a tutto lo spazio. Questa equazione integrale è lineare e omogenea. La linearità è una diretta conseguenza dell'ipotesi che la probabilità di una collisione è proporzionale al flusso Φ.

Un altro metodo della teoria del trasporto è **metodo del Kernel** il che si basa sull'espressione $K\left(\mathbf{x}, \mathbf{x}'\right)$ che indica la probabilità che un neutrone emesso da $\mathbf{x}'$ giunga, dopo un certo numero di collisioni, in $\mathbf{x}$. Se i neutroni vengono prodotti con probabilità $S\left(\mathbf{x}'\right)$ per unità di volume in tutti i punti x' dello spazio, la densità del numero di neutroni in x è

$$n\left(\mathbf{x}\right) = \int K\left(\mathbf{x}, \mathbf{x}'\right) S\left(\mathbf{x}'\right) d\mathbf{x}' \tag{7}$$

Il Kernel dipende dalle caratteristiche dei neutroni e dalle proprietà del mezzo in cui essi si diffondono. Se il mezzo è isotropo, omogeneo, infinito, $K\left(\mathbf{x}, \mathbf{x}'\right)$ deve dipendere solo dalla distanza $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$. Riprendendo la (6) possiamo scrivere [1]:

$$K\left(\mathbf{x}, \mathbf{x}'\right) = \frac{e^{-|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|\Sigma}}{4\pi\left|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\right|} \tag{8}$$

Poniamo i vettori posizione in questa relazione: $\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{r}$; sarà allora:

$$\Sigma_s\left(\mathbf{x}'\right) = \Sigma_s\left(\mathbf{x} + \mathbf{r}\right) \quad \text{e} \quad \Sigma\left(\mathbf{x}'\right) = \Sigma\left(\mathbf{x} + \mathbf{r}\right) \tag{9}$$

Nel caso di un **mezzo non omogeneo** il Kernel si modifica come segue:

$$\Sigma_s\left(\mathbf{x} + \mathbf{r}\right) \frac{\exp\left[-\int_0^1 \Sigma\left(\mathbf{x} + \xi\mathbf{r}\right) r d\xi\right]}{4\pi\left|\mathbf{r}\right|^2} \tag{10}$$

Tenendo conto della presenza di sorgenti identificate come $S\left(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t - \frac{r}{v}\right)$, il flusso $\Phi\left(\mathbf{x}, t\right)$ sarà:

$$\Phi\left(\mathbf{x}, t\right) = \int d\mathbf{r}\left[\Sigma_s\left(\mathbf{x} + \mathbf{r}\right)\Phi\left(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t - \frac{r}{v}\right) + S\left(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t - \frac{r}{v}\right)\right] \frac{\exp\left[-\int_0^1 \Sigma\left(\mathbf{x} + \xi\mathbf{r}\right) r d\xi\right]}{4\pi\left|\mathbf{r}\right|^2} \tag{11}$$

Quindi se il mezzo è omogeneo e non vi sono sorgenti esterne sarà: $\xi = 0$ e $S = 0$.

1° Caso – Risolviamo l'equazione ponendo $\Sigma_a = 0$, $S = 0$ e mezzo omogeneo infinito:

$$\Phi\left(\mathbf{x}, t\right) = \Sigma_s \int \Phi\left(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t - \frac{r}{v}\right) \frac{e^{-\Sigma_s r}}{4\pi r^2} d\mathbf{r} \tag{12}$$

Proposizione 1 *La soluzione della (12) è una costante.*

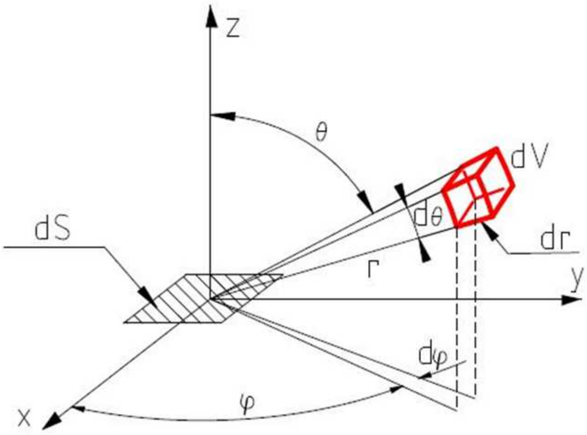

Figura 2: $d\mathbf{r}$ in coordinate sferiche.

Dimostrazione. Scriviamo:

$$\text{cost} = \Sigma_s \int \text{cost} \cdot \frac{e^{-\Sigma_s r}}{4\pi r^2} d\mathbf{r} \Longrightarrow 1 = \Sigma_s \int \frac{e^{-\Sigma_s r}}{4\pi r^2} d\mathbf{r} \tag{13}$$

Esprimiamo $d\mathbf{r}$ in coordinate sferiche (fig. 2). Le componenti del vettore $d\mathbf{r}$ sono:

$$ds_1 = dr, \; ds_2 = r d\theta, \; ds_3 = r \sin\theta d\varphi$$

per cui

$$1 = \frac{\Sigma_s}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{+\infty} r \cdot r \frac{e^{-\Sigma_s r}}{r^2} d\mathbf{r} \Longrightarrow 1 = \frac{\Sigma_s}{4\pi} \cdot \frac{4\pi}{\Sigma_s}$$

■

Fisicamente si spiega il perché $\Phi(\mathbf{x}, t)$ =costante e non potrebbe essere altrimenti essendo il messo omogeneo e infinito, non essendovi inoltre né sorgenti esterne né assorbimento.

Dunque in tal caso la densità neutronica è costante nel tempo e nello spazio.

Riferimenti bibliografici

[1] Weinberg A. M. Wigner E.P., 1958. *Physical Theory of Neutron Chain Reactors.*