Macchine ricorsive lineari: alcune applicazioni

Marcello Colozzo – http://www.extrabyte.info

Le macchine ricorsive lineari hanno un costo computazionale molto basso, giacchè il corrispondente sistema dinamico a tempo continuo è immediatamente integrabile. Vale comunque la pena esaminare alcuni comportamenti tipici.

Consideriamo un condensatore di capacità C collegato in serie a una resistenza di carico R e a un generatore di segnale di ingresso $V_{in}(t)$, come mostrato nello schema di fig. 1. Assumiamo un segnale di ingresso costante:

$$V_{in}(t) = V_0 \mathcal{U}(t - t_0), \tag{1}$$

dove V_0 è una costante, mentre $\mathcal{U}(t)$ è la funzione gradino unitario:

$$\mathcal{U}(t - t_0) = \begin{cases} 1, & \text{se } t \geq t_0 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

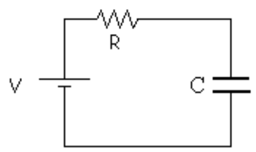

Figura 1: Serie RC.

La differenza di potenziale ai capi del condensatore [1] è:

$$V_C(t) = \frac{q(t)}{C},$$

dove $q(t)$ è la carica elettrica al tempo t sulle armature del condensatore. La legge di Ohm ci fornisce la caduta di tensione ai capi della resistenza, ovvero il segnale di uscita:

$$V_{out}(t) = Ri(t),$$

dove $i(t) = \frac{dq}{dt} \equiv \dot{q}$ è l'intensità di corrente. Applicando l'equazione alla maglia (legge di Kirchoff):

$$V_C(t) + V_{out}(t) = V_{in}(t), \quad \forall t \in [t_0, +\infty)$$

Cioè:

$$\frac{q}{C} + R\dot{q} = V_0, \quad \forall t \in [t_0, +\infty)$$

La (1) implica $q(t_0) = 0$ onde la carica elettrica al tempo t sulle armature del condensatore è la soluzione del problema di Cauchy:

$$\mathcal{P} : \begin{cases} \dot{q} = -\frac{1}{RC} q + \frac{V_0}{R} \\ q(t_0) = 0 \end{cases}, \tag{2}$$

Il circuito in esame è, quindi, un sistema autonomo lineare $\dot{q} = \alpha_0 q + \beta_0$, essendo $\alpha_0 = -\frac{1}{RC} < 0$, $\beta_0 = \frac{V_0}{R} > 0$. L'unica soluzione del problema (2) è:

$$q(t) = q_M \left[1 - e^{-\frac{1}{\tau_c}(t - t_0)}\right], \tag{3}$$

dove $\tau_c \overset{def}{=} RC > 0$ e $q_M \overset{def}{=} V_0 C > 0$. La soluzione del problema di Cauchy (2) è, dunque, una *salita esponenziale*; la grandezza τ_c ha le dimensioni di un tempo e si chiama **costante di tempo** del circuito. La grandezza q_M è la carica elettrica a regime. Infatti:

$$\lim_{t \to +\infty} q(t) = q_M$$

Ad esempio, per $R = 5\,\Omega$, $C = 1\,\mu\text{F}$ abbiamo una costante di tempo $\tau_c = 5 \times 10^{-6}\,\text{s}$. Se tale circuito è alimentato da una f.e.m. $V_0 = 10\,\text{V}$, otteniamo l'andamento riportato in fig. 2.

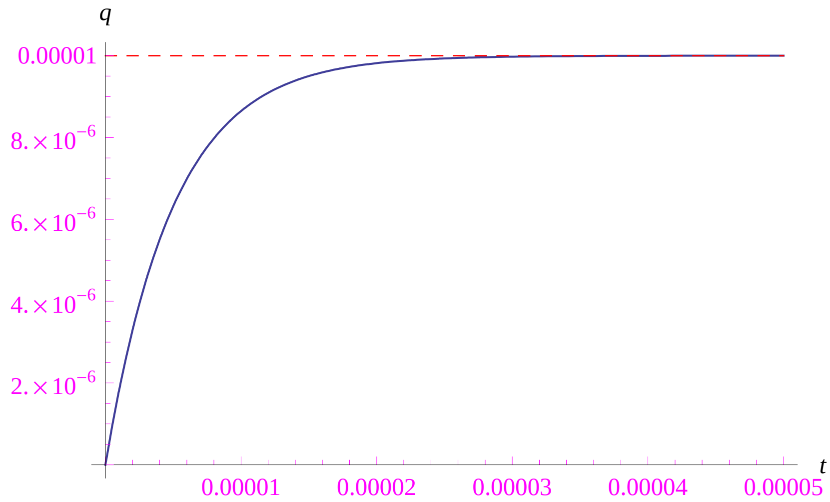

Figura 2: Andamento della carica elettrica $q(t)$ sulle armature del condensatore. Il circuito viene chiuso all'istante iniziale $t_0 = 0$. Il tempo è espresso in secondi, mentre la carica elettrica in Coulomb.

L'orbita di questo sistema è il seguente luogo geometrico:

$$\left\{ (q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^2 \mid \quad 0 \leq q \leq q_M, \ \dot{q} = -\frac{1}{RC} q + \frac{V_0}{R} \right\},$$

cioè il segmento della retta di equazione $\dot{q} = -\frac{1}{\tau_c} q + \frac{V_0}{R}$, come illustrato in fig 3, utilizzando i precedenti dati numerici. Da tale diagramma vediamo che il sistema evolve deterministicamente dallo stato iniziale $\left(\frac{V_0}{R}, 0\right)$ allo stato finale $(0, q_M)$. Si noti che quest'ultimo viene raggiunto a $t = +\infty$. In simboli:

$$\left(\frac{V_0}{R}, 0 \right) \underset{\text{evoluzione determnistica}}{\longrightarrow} (0, q_M)$$

A questo punto appare chiaro il significato fisico della costante di tempo τ_c: tale grandezza fissa la scala dei tempi del transitorio. Infatti:

$$q(t \gg \tau_c) \simeq q_M$$

L'intensità di corrente è:

$$i(t) = \frac{d}{dt} q(t) = i_M e^{-t/\tau_c}, \tag{4}$$

dove $i_M \overset{def}{=} \frac{V_0}{R}$. Cioè, $i(t)$ è un esponenziale smorzato con costante di tempo τ_c. In fig. 4 riportiamo l'andamento dell'intensità di corrente in funzione del tempo per la serie RC vista in precedenza. La tensione in uscita è:

$$V_{out}(t) = R i(t)$$

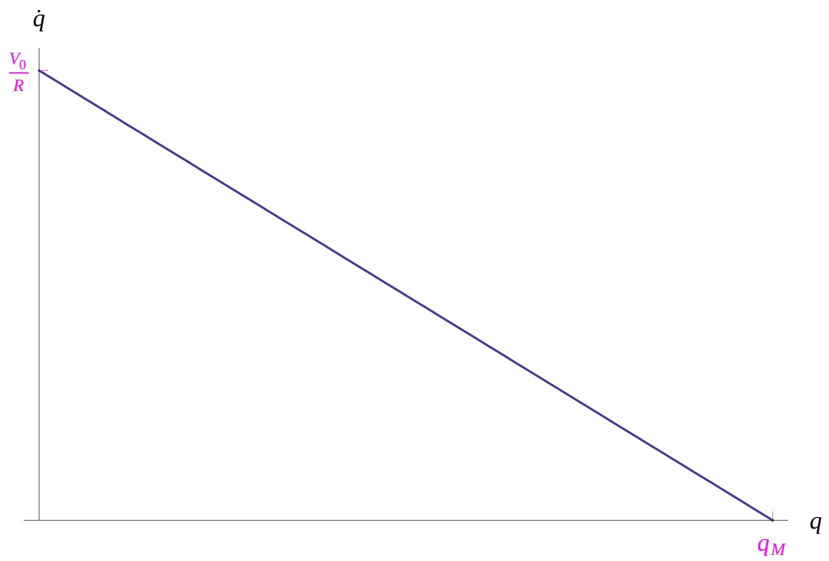

Figura 3: Traiettoria nello spazio delle configurazioni per un circuito RC. La derivata $\dot{q}$ si annulla per $q = q_M$, che è il valore di regime della carica elettrica: raggiunto tale valore (a $t \to +\infty$) la carica elettrica non varia, per cui la derivata si annulla.

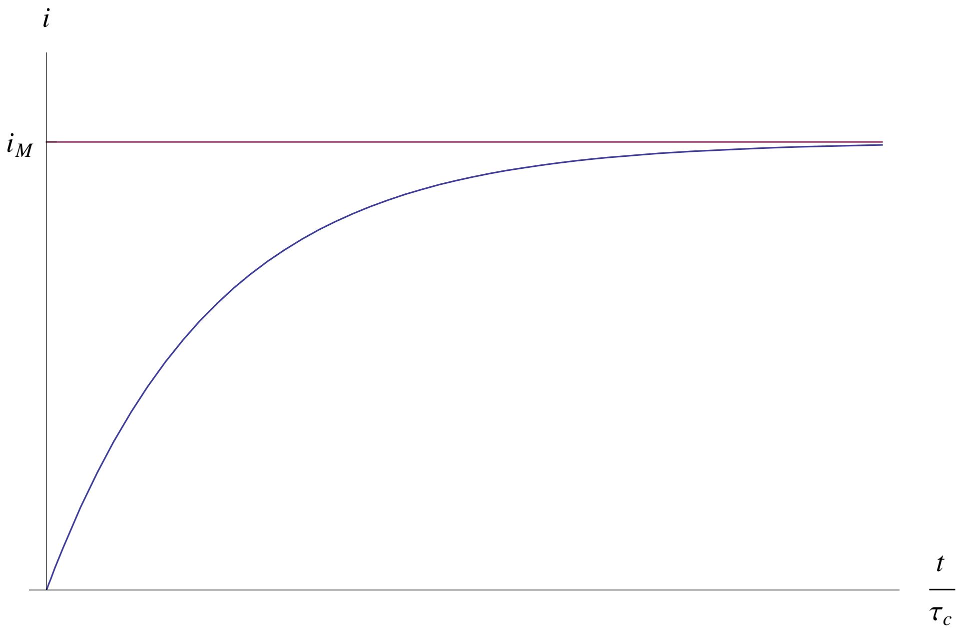

Figura 4: Andamento dell'intensità di corrente $i\left(t\right) = \frac{V_0}{R} e^{-t/\tau_c}$.

Tenendo conto della (4):

$$V_{out}\left(t\right)=V_M e^{-t/\tau_c}, \tag{5}$$

dove $V_M=Ri_M$. Infine, la tensione ai capi del consentore è:

$$V_C\left(t\right)=V_0\left(1-e^{-t/\tau_c}\right) \tag{6}$$

A regime troviamo:

$$V_{out}\left(t\gg\tau_c\right)=0,\quad V_C\left(t\gg\tau_c\right)=V_0$$

Per discutere il comportamento della corrispondente macchina ricorsiva lineare $\mathcal{M}_\Delta$, è conveniente adimensionalizzare il problema passando dalle variabili (t,q) alle variabili (x,ξ) ovvero tempo adimensionale e carica adimensionale:

$$\begin{cases} x=\frac{t}{\tau_c} \\ \xi=\frac{q}{q_M} \end{cases},$$

cosicchè il problema (2) si scrive:

$$\mathcal{P}:\begin{cases} \xi'=-\xi+1 \\ \xi\left(0\right)=0 \end{cases}, \tag{7}$$

dove l'apice rappresenta la derivazione rispetto a x. Se $F\left(\xi\right)=-\xi+1$, la corrispondente funzione di trasferimento di $\mathcal{M}_\Delta$ è $f_\Delta\left(x\right)=x+F\left(x\right)\cdot\Delta=\left(1-\Delta\right)\xi+\xi$, ed è questa che va iterata, ottenendo l'orbita riportata in fig. 5, da cui vediamo che $\mathcal{M}_\Delta$ "parte" dallo stato di carica iniziale nulla ($\xi=0$) per convergere asintoticamente verso lo stato $\xi=1$, i.e. $q=q_M$.

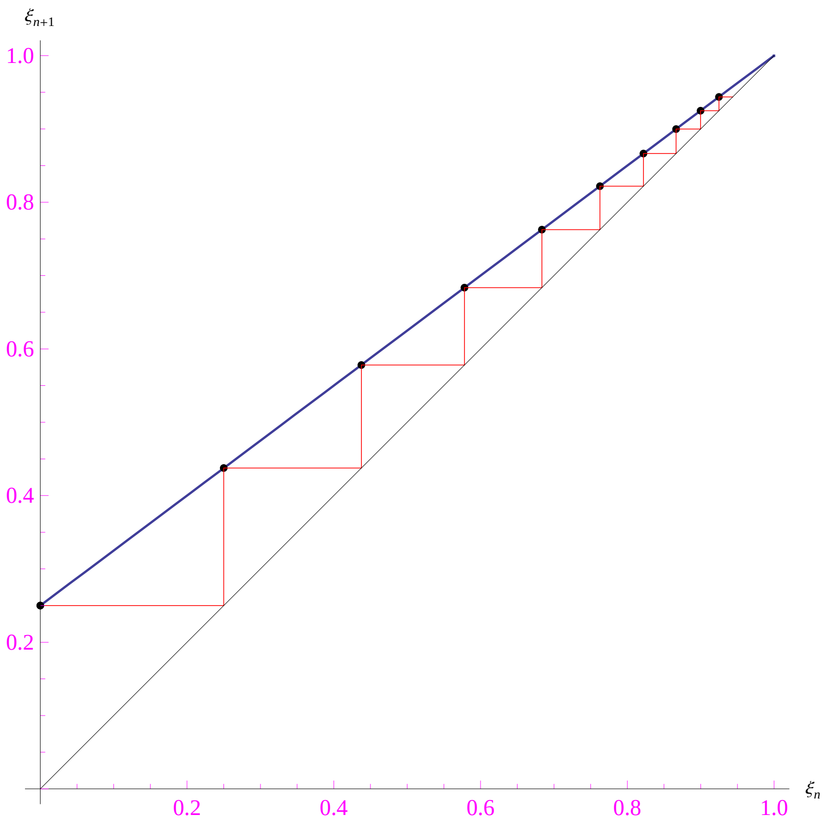

Figura 5: Diagramma di König-Lemaray della macchina ricorsiva che simula il processo di carica di un condensatore in serie ad una resistenza R. La grandezza ξ è la carica elettrica adimensionalizzata $\frac{q}{q_M}$.

Riferimenti bibliografici

[1] Edmininster J.A, 1992. *Circuiti elettrici*. Etas