Transitorio in un circuito RL

Marcello Colozzo – www.extrabyte.info

Ad interruttore chiuso (fig. 1), applichiamo il secondo principio di Kirchoff:

$$V_0 = V_R + V_L, \tag{1}$$

dove: V_0 è il valore della f.e.m.; V_R è la caduta di tensione ai capi della resistenza; V_L è la caduta di tensione ai capi dell'induttanza.

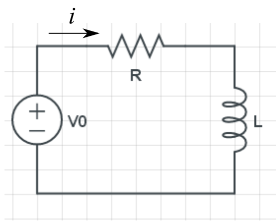

Figura 1: Circuito RL serie.

Dalla legge di Ohm:

$$V_R = Ri, \tag{2}$$

essendo i l'intensità di corrente che attraversa la serie RL. Siccome L è il coefficiente di autoinduzione dell'induttanza, si ha:

$$V_L = L\frac{di}{dt} \tag{3}$$

Quindi

$$V_0 = Ri + L\frac{di}{dt},$$

da cui

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{V_0}{L}, \tag{4}$$

che è un'equazione differenziale del primo ordine in $i(t)$ (cioè $i(t)$ è la funzione incognita). In particolare, è un'equazione lineare. Applichiamo il procedimento standard di risoluzione delle equazioni lineari del primo ordine, trovando il fattore integrante:

$$I(t) = e^{\int \frac{R}{l}dt} = e^{\frac{R}{L}t}$$

Moltiplicando primo e secondo membro della (4) per $I(t)$:

$$\underbrace{e^{\frac{R}{L}t}\frac{di}{dt} + e^{\frac{R}{L}t}\frac{R}{L}i}_{=\frac{d}{dt}\left[i(t)e^{\frac{R}{L}t}\right]} = \frac{V_0}{L}e^{\frac{R}{L}t}$$

Integriamo primo e secondo membro rispetto a t:

$$\int \frac{d}{dt}\left[i(t)\,e^{\frac{R}{L}t}\right]dt = \frac{V_0}{L}\int e^{\frac{R}{L}t}dt$$

Cioè

$$i(t)\,e^{\frac{R}{L}t} = C + \frac{V_0}{R}e^{\frac{R}{L}t},$$

essendo C una costante arbitraria (costante di integrazione). Segue

$$i\left(t,C\right)=\frac{V_0}{R}+Ce^{-\frac{R}{L}t} \tag{5}$$

dove abbiamo introdotto a primo membro la dipendenza dalla costante C. Il testo dice che nell'istante iniziale non circola corrente, per cui

$$i\left(0,C\right)=0\Longleftrightarrow\frac{V_0}{R}+C=0\Longleftrightarrow C_0=-\frac{V_0}{R}$$

che è il valore della costante di integrazione che risolve il nostro problema. Sostituendo questo valore nella (5) si trova

$$i\left(t\right)\equiv i\left(t,C_0\right)=\frac{V_0}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right) \tag{6}$$

Esaminiamo il significato delle varie grandezze:

$$\frac{V_0}{R}\stackrel{def}{=}i_0$$

è l'intensità di corrente a regime. Infatti, dalla (5):

$$\lim_{t\to+\infty}i\left(t\right)=i_0 \tag{7}$$

Inoltre

$$\frac{R}{L}\stackrel{def}{=}\tau$$

ha le dimensioni di un tempo; precisamente fissa la scala dei tempi del circuito, giacchè per $t\gg\tau$ l'esponenziale $e^{-\frac{R}{L}t}=e^{-t/\tau}$ è trascurabilmente piccolo, per cui la (7) è approssimata da

$$i\left(t\gg\tau\right)\simeq i_0$$

Significa che per un intervallo di tempo molto più grande di τ, la corrente ha raggiunto il valore di regime. Notiamo che quest'ultimo è quello che si ha istantaneamente per $L=0$ (circuito puramente ohmico). Con l'introduzione di tali grandezze, la soluzione (6) si riscrive

$$i\left(t\right)=i_0\left(1-e^{-t/\tau}\right)$$

Quindi l'andamento della corrente è una *salita esponenziale*, ed è graficata in fig. 2 per particolari valori dei parametri circuitali.

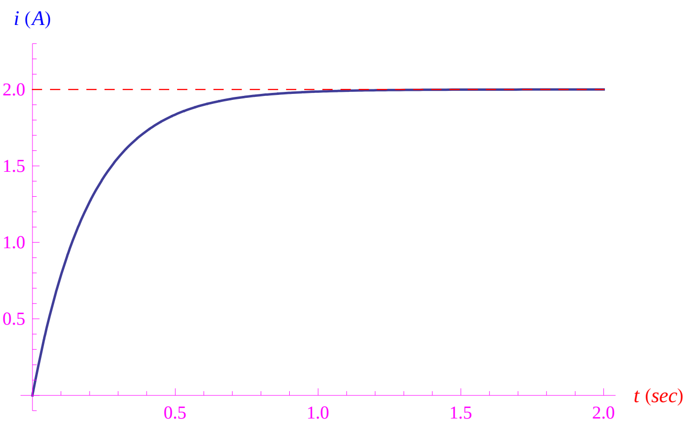

Figura 2: Andamento dell'intensità di corrente per $V_0 = 10\,\mathrm{V}$, $R = 5\,\Omega$, $L = 1\,\mathrm{H}$.