Evoluzione di un sistema quanto–meccanico

Marcello Colozzo

Sia S_q un sistema quanto-meccanico in regime non relativistico. Enunciamo il seguente postulato [1].

Postulato 1 *Al sistema S_q sono univocamente associati uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ e un operatore hermitiano $\hat{H} \in end(\mathcal{H})$. Lo stato quantistico di S_q, inteso come insieme di tutte le possibili informazioni sul sistema medesimo, è rappresentato da un vettore di norma unitaria di $\mathcal{H}$ che nella notazione di Dirac [2] si scrive:*

$$|\psi\rangle \in \mathcal{H} \tag{1}$$

Per quanto precede:

$$|| |\psi\rangle || = \sqrt{\langle\psi|\psi\rangle} = 1 \tag{2}$$

L'evoluzione dinamica di S_q implica la dipendenza dal tempo t dello stato $|\psi\rangle$, per cui

$$|\psi(t)\rangle \in \mathcal{H}, \qquad \forall t \in [t_0, +\infty), \tag{3}$$

dove t_0 è l'istante iniziale. L'evoluzione temporale conserva la norma unitaria del vettore di stato:

$$|| |\psi(t)\rangle || = \sqrt{\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle} = 1, \qquad \forall t \in [t_0, +\infty) \tag{4}$$

Il vettore (4) è una soluzione del problema di Cauchy:

$$\mathcal{P} : \begin{cases} \frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = -\frac{i}{\hbar}\hat{H}|\psi(t)\rangle \\ |\psi(t_0)\rangle = |\psi_0\rangle \end{cases}, \qquad \left(\hbar = \frac{h}{2\pi}, \quad \textit{con } h \textit{ costante di Planck}\right) \tag{5}$$

L'equazione differenziale che compare in (5) è l'**equazione di Schrödinger** scritta in forma operatoriale. Prima di specificare la forma dell'operatore $\hat{H}$, osserviamo che il problema (5) è compatibile e determinato, comunque prendiamo lo stato iniziale $|\psi_0\rangle \in \mathcal{H}$. In altri termini, $\mathcal{P}$ ammette una sola soluzione $|\psi(t)\rangle$, per cui l'evoluzione temporale dello stato di S_q è deterministica. Questa conclusione richiama l'evoluzione deterministica dello stato meccanico di un sistema che obbedisce alla Meccanica classica. Senza perdita di generalità, consideriamo un punto materiale di massa m che si muove in un campo di forze conservativo di energia potenziale $V(\mathbf{x})$, essendo $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. L'hamiltoniana è

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{x}) \tag{6}$$

E quindi le equazioni di Hamilton:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} H(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}}{m} \\ \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} H(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = -\nabla V(\mathbf{x}) \end{cases} \tag{7}$$

Derivando la prima rispetto al tempo e tenendo conto della seconda, otteniamo la ben nota equazione del moto:

$$\ddot{\mathbf{x}} = -\frac{1}{m}\nabla V(\mathbf{x}), \tag{8}$$

ovvero il sistema di equazioni differenziali sotto forma normale del secondo ordine:

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\frac{1}{m}\frac{\partial}{\partial x} V(x, y, z) \\ \ddot{y} = -\frac{1}{m}\frac{\partial}{\partial y} V(x, y, z) \\ \ddot{z} = -\frac{1}{m}\frac{\partial}{\partial z} V(x, y, z) \end{cases} \tag{9}$$

Le condizioni iniziali

$$\begin{aligned} x(t_0) &= x_0, \ \ y(t_0) = y_0, \ \ z(t_0) = z_0 \\ \dot{x}(t_0) &= \dot{x}_0, \ \ \dot{y}(t_0) = \dot{y}_0, \ \ \dot{z}(t_0) = \dot{z}_0 \end{aligned} \tag{10}$$

individuano un problema di Cauchy relativo al sistema di equazioni differenziali in forma normale (9), e assumendo – come ci si aspetta – che $V(x, y, z)$ sia una funzione sufficientemente regolare, segue che il predetto problema è compatibile e determinato i.e. l'evoluzione temporale dello stato meccanico $(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ è deterministica. Per un assegnato istante iniziale, abbiamo dunque un'unica soluzione $(x(t), y(t), z(t))$ che individua parametricamente la traiettoria della particella che si identifica nell'arco di curva regolare:

$$\gamma : x = x(t), \ y = y(t), \ z = z(t), \quad t \in [t_0, +\infty), \tag{11}$$

in cui il tempo t svolge il ruolo di parametro. Nel caso di una particella quantistica (elettrone, protone, etc.) esistono configurazioni sperimentali che consentono di localizzare la particella in una regione di dimensioni trascurabilmente piccole, per cui è giustificato il termine "particella", dando così la possibilità di definire la posizione iniziale attraverso la prima delle (10). Al contempo, non è possibile definire – con una precisione arbitrariamente grande – la seconda delle (10), rendendo impossibile la formulazione del corrispondente problema di Cauchy. Tale circostanza distrugge la nozione di traiettoria per una particella quantistica.

Riferimenti bibliografici

[1] P. Caldirola, R. Cirelli, G.M. Prosperi, *Introduzione alla Fisica Teorica,* BUR, 1982

[2] P. A. M. Dirac, *I principi della Meccanica Quantistica,* Boringhieri, Torino, 1959.

[3] J. V. Neumann, *Matematical Foundation of Quantum Mechanics,* Princeton, 1955.

[4] R. Penrose, *La strada che porta alla realtà.* BUR, 2007.

[5] H. Everett, *Rev. Mod. Phys,* **29**, 454 (1957). Available at http://tinyurl.com/everettw