Traiettoria iperbolica

Marcello Colozzo – http://www.extrabyte.info

Assegnata un arco di curva Γ di rappresentazione parametrica:

$$\mathbf{x}(t) = 3\cosh(2t)\,\mathbf{i} + 3\sinh(2t)\,\mathbf{j} + 6t\mathbf{k}, \quad t \in [0, 2\pi], \tag{1}$$

determinare:

1. Una rappresentazione naturale di Γ.
2. La lunghezza dell'arco Γ.

Soluzione
Determiniamo innanzitutto il vettore tangente:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = 6\sinh(2t)\,\mathbf{i} + 6\cosh(2t)\,\mathbf{j} + 6\mathbf{k} \tag{2}$$

Segue

$$|\dot{\mathbf{x}}(t)| = \sqrt{36\sinh^2(2t) + 36\cosh^2(2t) + 36} = 6\sqrt{\sinh^2(2t) + \cosh^2(2t) + 1}$$

Ricordando la relazione fondamentale

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \Longrightarrow \sinh^2 x = \cosh^2 x - 1,$$

si ha

$$|\dot{\mathbf{x}}(t)| = 6\sqrt{2\cosh(2t)} = 6\sqrt{2}\cosh(2t)$$

Assumiamo un riferimento curvilineo con origine degli archi nel punto corrispondente a $t_0 = 0$, e con verso positivo coincidente con il verso delle t crescenti. Quindi

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t |\dot{\mathbf{x}}(\theta)|\, d\theta = 6\sqrt{2}\int_0^t \cosh(2\theta)\, d\theta = 3\sqrt{2}\int_0^t \cosh(2\theta)\, d(\theta) \\ &= 3\sqrt{2}\,\sinh(2\theta)\big|_{\theta=0}^{\theta=t} \end{aligned}$$

Cioè

$$s(t) = 3\sqrt{2}\sinh(2t), \quad t \in [0, \pi] \tag{3}$$

Se t denota il tempo e la funzione vettoriale (1) il vettore posizione di una particella che si muove lungo Γ, la velocità scalare è

$$\dot{s}(t) = 6\sqrt{2}\cosh(2t),$$

risultando

$$\dot{s}(t) > 0, \quad \forall t \in [0, 2\pi],$$

onde $s(t)$ è strettamente crescente in $[0, 2\pi]$ i.e. il moto è progressivo. Per passare alla rappresentazione naturale, dobbiamo trovare la funzione inversa di $s(t)$. Precisamente

$$\sinh 2t = \frac{s}{3\sqrt{2}} \Longrightarrow t(s) = \frac{1}{2}\text{arcsinh}\left(\frac{s}{3\sqrt{2}}\right) \tag{4}$$

Tenendo conto che $s(t)$ è strettamente crescente si ha:

$$0 \leq t \leq 2\pi \Longrightarrow 0 \leq s(t) \leq 3\sqrt{2}\sinh(2\pi),$$

per cui

$$t(s) = \frac{1}{2}\text{arcsinh}\left(\frac{s}{3\sqrt{2}}\right), \quad s \in \left[0, 3\sqrt{2}\sinh(2\pi)\right] \tag{5}$$

Siamo ora in grado di scrivere la rappresentazione naturale di Γ:

$$\mathbf{x}(s) = \varphi(s)\,\mathbf{i} + \psi(s)\,\mathbf{j} + \chi(s)\,\mathbf{k},$$

essendo

$$\begin{aligned}\varphi(s) &= x(t(s)) = 3\cosh\left[\text{arcsinh}\left(\frac{s}{3\sqrt{2}}\right)\right] \\ &= 3\sqrt{1+\frac{s^2}{18}} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{s^2+18}{2}}\end{aligned}$$

Cioè

$$\varphi(s) = \sqrt{\frac{s^2+18}{2}} \tag{6}$$

La componente y

$$\psi(s) = y[t(s)] = 3\sinh[2t(s)] = \frac{s}{\sqrt{2}} \tag{7}$$

Infine

$$\chi(s) = z[t(s)] = 3\text{arcsinh}\left(\frac{s}{3\sqrt{2}}\right) \tag{8}$$

Finalmente

$$\mathbf{x}(s) = \sqrt{\frac{s^2+18}{2}}\mathbf{i} + \frac{s}{\sqrt{2}}\mathbf{j} + 3\text{arcsinh}\left(\frac{s}{3\sqrt{2}}\right)\mathbf{k}, \tag{9}$$

che ci consente di calcolare il versore tangente:

$$\boldsymbol{\tau}(s) = \mathbf{x}'(s) = \varphi'(s)\,\mathbf{i} + \psi'(s)\,\mathbf{j} + \chi'(s)\,\mathbf{k}$$

Calcoliamo le derivate

$$\begin{aligned}\varphi'(s) &= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\frac{s^2+18}{2}}} \cdot \frac{2s}{2} = \frac{s}{\sqrt{2(s^2+18)}} \\ \psi'(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \chi'(s) &= 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{s^2}{18}}} \cdot \frac{1}{3\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{s^2+18}},\end{aligned}$$

cosicché

$$\boldsymbol{\tau}(s) = \frac{s}{\sqrt{2(s^2+18)}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j} + \frac{3}{\sqrt{s^2+18}}\mathbf{k}$$

risultando

$$|\boldsymbol{\tau}(s)|^2 = \frac{s^2}{2(s^2+18)} + \frac{1}{2} + \frac{9}{s^2+18} = \frac{2s^2+36}{2(s^2+18)} = 1,$$

come appunto doveva essere. La velocità vettoriale si scrive

$$\mathbf{v} = \dot{s}\boldsymbol{\tau}$$

Il quesito 2 è immediato:

$$L(\Gamma) = s(2\pi) = 3\sqrt{2}\sinh(2\pi) \simeq 6.08 \cdot 10^5$$

In fig. 1 è tracciata la curva assegnata, dove il pallino indica l'origine degli archi.

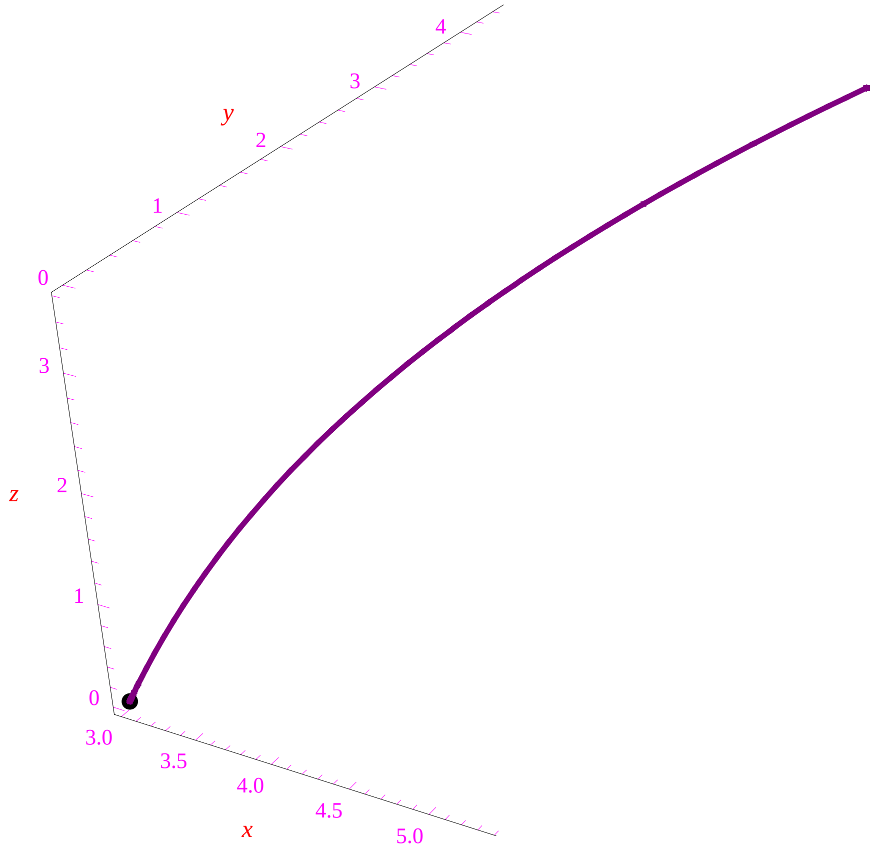

Figura 1: Curva di rappresentazione parametrica (). Il pallino indica l'origine degli archi del riferimento curvilineo assegnato.