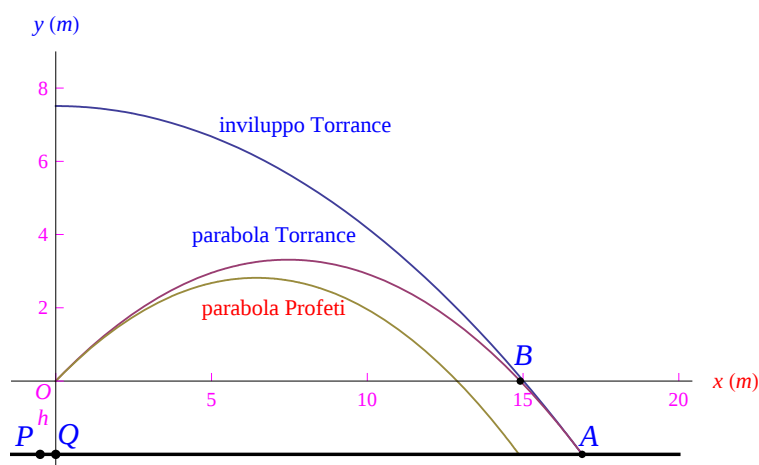


Matematica Open Source

$$\frac{d}{dx} f(x) \quad \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \quad \int f(x) dx \quad \oint_{\Gamma} (X dx + Y dy + Z dz)$$

Lancio del peso: Torrance vs Profeti (1949)

Marcello Colozzo



Esercizio 1 (Testo tratto da [1]. La soluzione è nostra).

Il primato mondiale del getto del peso era, nel 1949, 17.40 m (Jack Torrance); trattandosi del miglior risultato di una numerosissima serie, appare ragionevole ammettere che esso sia conseguenza del concorso di tutte le condizioni più favorevoli, cioè massima velocità iniziale ed angolo di lancio optimum. Ammettendo ancora che l'atleta abbia lanciato l'attrezzo da un punto O , alto 2 m da terra e 0.5 m orizzontalmente oltre la pedana, si determini: a) la velocità iniziale; b) l'angolo di lancio θ ; c) se (e di quanto) sarebbe diverso θ optimum per il nostro Profeti, il cui primato è di 15.37 m; d) di quanto sarebbe risultato inferiore il getto di Torrance, se l'angolo di lancio fosse stato, *ceteris paribus*, di 45° .

Soluzione

Lo schema dell'esercizio è riportato in fig. 1 dove abbiamo istituito un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy . Poniamo

$$d = 0.5 \text{ m}, \quad h = 2 \text{ m} \quad (1)$$

Detto P l'estremo della pedana, e Q la proiezione ortogonale del punto di lancio O sul terreno, si che l'ascissa del punto A in cui l'attrezzo atterra è

$$x_A = \overline{PA} - \overline{PQ} = 16.9 \text{ m} \quad (2)$$

Nello stesso grafico viene riportato il punto B , cioè l'intersezione della traiettoria γ_T con l'asse x . Ne consegue che l'ascissa di B altro non è che la gittata (rispetto all'asse x)

$$R = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta,$$

che è manifestamente ignota giacché non conosciamo né la velocità di lancio né l'angolo di lancio.

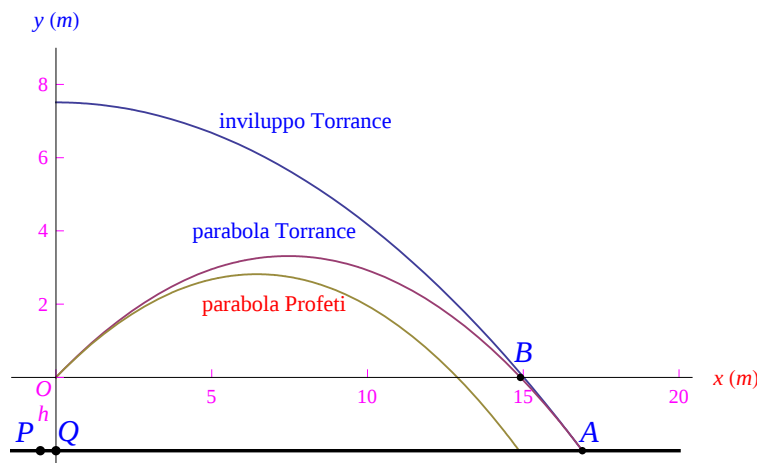


Figura 1: Esercizio 1.

Tuttavia, il problema ci sta dicendo che il punto A è raggiungibile da un'unica traiettoria, quindi $A \in \gamma_s$, essendo γ_s la **parabola di sicurezza**:

$$\gamma_s : y = v_{02g}^2 - \frac{g}{2v_0} x^2$$

Avendo indicato con $(x_A = 19.9 \text{ m}, y_A = -2 \text{ m})$ le coordinate del predetto punto e imponendo l'appartenenza a γ_s , si ha:

$$y_A = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2} x_A^2,$$

che va risolta rispetto a v_0 . Dopo qualche passaggio:

$$\frac{v_0^2}{g} = \begin{cases} -h + \sqrt{h^2 + x_A^2} \\ -h - \sqrt{h^2 + x_A^2} \end{cases}$$

La seconda radice non è accettabile, in quanto è $h > 0$. Quindi

$$v_0 = \sqrt{-h + \sqrt{h^2 + x_A^2}} = 12.13 \text{ m/s} \quad (3)$$

Quesito (b).

L'equazione della traiettoria γ_T è

$$y = x \tan \theta - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} x^2 \quad (4)$$

Imponiamo la condizione di appartenenza del punto $A(x_A, y_A)$ a γ_T :

$$y_A = x_A \tan \theta - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} x_A^2,$$

da cui possiamo ricavare l'angolo di lancio. Per procedere in maniera più spedita, applichiamo una notevole proposizione relativa all'**angolo di sito** di un bersaglio. Precisamente:

$$\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2} + \varepsilon_0, \quad (5)$$

essendo ε_0 l'angolo di sito di A :

$$\varepsilon_0 = \arctan\left(\frac{y_A}{x_A}\right) = -0.1178$$

Per quanto precede, $A \in \gamma_s$ i.e. è raggiungibile da una sola traiettoria, onde $\theta_1 = \theta_2 = \theta$. Dalla (5):

$$\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{\varepsilon_0}{2} = 0.7265 \text{ rad} = 41^\circ 37'.2 \quad (6)$$

Quesito (c)

Per il Profeti abbiamo il punto $A'(x'_A, y'_A)$, dove

$$x'_A = \overline{PA'} - \overline{PQ} = 14.87 \text{ m}, \quad y'_A = -2 \text{ m} \quad (7)$$

In questo caso la (5) si scrive:

$$2\theta' = \frac{\pi}{2} + \varepsilon'_0,$$

dove

$$\varepsilon'_0 = \arctan\left(\frac{y'_A}{x'_A}\right)$$

Sostituendo i valori numerici:

$$\theta' = 41^\circ 10'.2 \quad (8)$$

Quesito (d)

L'esercizio chiede di passare da $\theta = 41^\circ 37'.2$ a $\theta_1 = 45^\circ$. A prima vista ci aspettiamo un aumento della gittata. Anzi, per questo valore dell'angolo di tiro, la gittata è massima. Ma ciò si verifica sull'asse x e non sul terreno (che è per così dire, depresso rispetto all'asse x). In sostanza si tratta di calcolare l'ascissa x''_A del punto A'' di intersezione della parabola γ_T con la retta di equazione $y = -2$ che rappresenta il terreno. Intanto l'equazione di γ_T per $\theta_1 = 45^\circ$ si scrive:

$$y = x - \frac{g}{v_0^2}x^2$$

Deve essere

$$y''_A = x''_A - \frac{g}{v_0^2}x''_A{}^2, \quad (y''_A = y_A = -2)$$

Risolvendo rispetto a x''_A :

$$x''_A = \frac{v_0^2}{2g} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4gy_A}{v_0^2}} \right)$$

La soluzione che ci interessa è quella derivante dal segno superiore, giacchè l'altra è l'ascissa del punto di intersezione della parabola con la retta $y = -2$, nella regione $x < 0$. Quindi

$$x''_A = \frac{v_0^2}{2g} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4gy_A}{v_0^2}} \right) = 16.80 \text{ m},$$

per cui

$$\Delta x_A = x'_A - x''_A = 0.1 \text{ m}$$

L'interpretazione geometrica di tale risultato apparentemente contraddittorio è la seguente: la parabola relativa all'angolo di lancio 45° pur avendo una gittata max (rispetto all'asse x), ha una curvatura maggiore, per cui interseca la retta $y = -2$ in un punto di ascissa minore rispetto all'ascissa di intersezione dell'altra parabola (fig. 2).

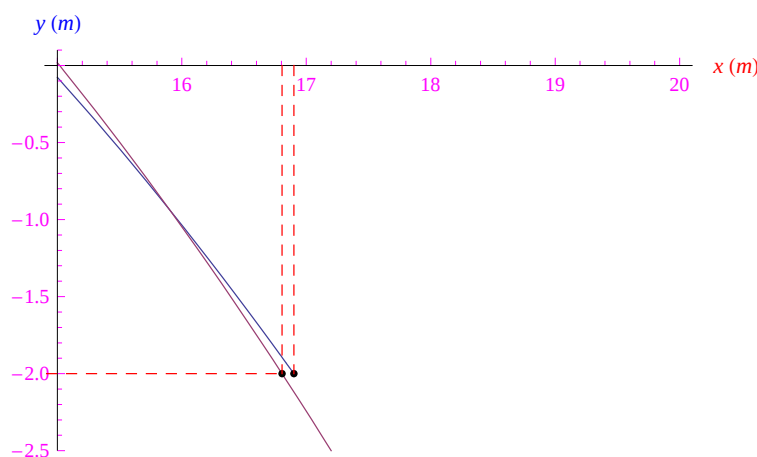


Figura 2: Esercizio 1.

Bibliografia

- [1] Mandò M., *Esercizi e problemi di Fisica. Volume I: Meccanica - Termologia*. Libreria universitaria, 1958.