Toro aperto

Marcello Colozzo

Sia $\mathbf{F}(x, y, z)$ un campo conservativo definito in una regione dello spazio fisico, matematicamente rappresentata da un aperto connesso E di $\mathbb{R}^3$.

Osservazione 1 *In Analisi matematica è consuetudine chiamare "campo" un insieme aperto, per cui abbiamo un conflitto di denominazioni, in quanto ci si potrebbe confondere con la nozione di campo vettoriale (o di campo scalare). L'ipotesi di connessione del campo ci permette di considerare una traiettoria di un punto materiale. Infatti, un campo E è connesso se prendendo ad arbitrio una coppia di punti di E, esiste una poligonale tracciata in E e avente per estremi tali punti.*

Come è noto, il carattere conservativo del campo $\mathbf{F}(x, y, z)$ si traduce matematicamente nell'integrabilità della forma differenziale lineare

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz,$$

cioè del lavoro elementare $dL = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ eseguito dalla forza $\mathbf{F}$. D'altra parte, per un campo di forze non necessariamente conservativo possiamo comunque associare il campo vettoriale

$$\text{rot}\mathbf{F} = \nabla \wedge \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \tag{1}$$

Il campo di forze si dice *irrotazionale* se

$$\text{rot}\mathbf{F} = \mathbf{0}, \quad \forall (x, y, z) \in E$$

Per il teorema di Stokes [1], comunque prendiamo una superficie aperta generalmente regolare contenuta in E:

$$\oint_{\pm\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0, \tag{2}$$

essendo $\gamma = B(S)$ i.e. il bordo della predetta superficie.

Conclusione 2 *Il lavoro eseguito dalla forza F lungo il bordo di una qualunque superficie aperta contenuta in E, è nullo.*

D'altra parte, dallo sviluppo del determinante simbolico (1) si ha:

$$\text{rot}\mathbf{F} = \mathbf{0} \Longleftrightarrow \frac{\partial F_z}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial z}, \ \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x}, \ \frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial y} \tag{3}$$

È possibile generalizzare la conclusione (2) a una qualunque curva γ chiusa contenuta in E, generalmente regolare? Più precisamente:

$$\oint_{\pm\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0, \quad \forall \gamma \subset E, \text{ gen. regolare, semplice e chiusa}$$

La risposta dipende dalla topologia del campo connesso E, nel senso che deve essere verificata la condizione:

$$\forall \gamma \subset E, \ \exists S \subset E \mid B(S) = \gamma, \tag{4}$$

dove S è una superficie aperta generalmente regolare. Un immediato controesempio è offerto dal toro aperto: non esiste alcuna superficie aperta contenuta nel toro aperto avente per bordo una qualunque curva tracciata nel predetto campo connesso e "avvolgente" l'asse di rotazione. Diversamente, una corteccia sferica i.e. il campo compreso tra due sfere concentriche verifica la condizione (4).

Esaminiamo più da vicino il caso del toro aperto. A tale scopo consideriamo il disco aperto $\mathcal{D}$ la cui frontiera è la circonferenza $\mathcal{C}$ di centro $(2,0,0)$ di raggio unitario e tracciata nel piano coordinato xz:

$$\mathcal{D} = \left\{(x,y,z) \in R^3 \mid (x-2)^2 + z^2 < 1,\ y = 0\right\} \tag{5}$$

Una rappresentazione parametrica di $\mathcal{C}$ è

$$x = 2 + \cos\theta, \quad y = 0, \quad z = \sin\theta, \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi \tag{6}$$

La rotazione del piano contenente $\mathcal{D}$ (inizialmente coincidente con il piano xz) genera un solido denominato *toro aperto*[1] (1).

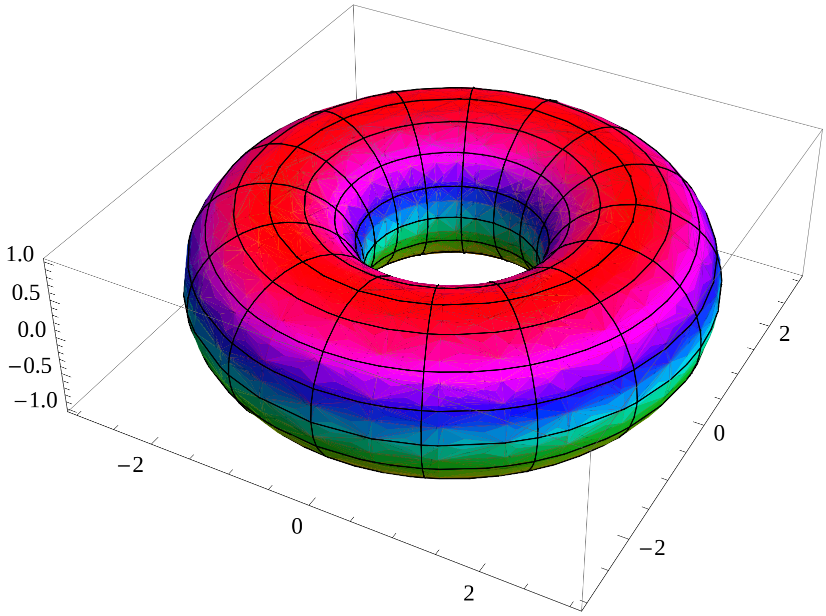

Figura 1: Toro aperto, generato dalla rotazione del disco (5).

Abbiamo la seguente definizione:

Definizione 3 *Un campo connesso $E \subseteq \mathbb{R}^3$ si dice* **semplicemente connesso** *o a* **connessione lineare semplice**[2]*, se ogni curva generalmente regolare, semplice e chiusa, tracciata in E, è il bordo di una superficie generalmente regolare e aperta, contenuta in E.*

Conclusione 4 *Il toro aperto pur essendo un campo connesso, non è un campo semplicemente connesso.*

Riferimenti bibliografici

[1] Ghizzetti A., 1978. *Lezioni di Analisi matematica. Volume II.* Veschi

[2] Sette D., 1968. *Lezioni di Fisica. Volume I.* Veschi

[1] È un insieme aperto in quanto la sua *generatrice* è un aperto (disco aperto).
[2] Alcuni autori utilizzano la locuzione *connessione superficiale semplice.*