

Matematica Open Source

$$\frac{d}{dx} f(x) \quad \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \quad \int f(x) dx \quad \oint_{\Gamma} (X dx + Y dy + Z dz)$$

Può una palla di biliardo collidere con sé stessa?

versione 1.0

Marcello Colozzo



Immagine tratta da 123rf.com

Indice

1	Aspetti matematici della cinematica non relativistica	1
1.1	Moti unidimensionali	1
2	Una variante del biliardo di Novikov	4
2.1	Wormhole puntiforme	4
2.2	Auto-collisione	5
2.3	Il principio di auto-consistenza di Novikov	7
A	Dettagli matematici	16
A.1	Diagrammi frattali	16
A.2	Rapporto incrementale e il teorema della permanenza del segno	17
A.3	Urto centrale	19

Prefazione

Nella seconda metà degli anni '80 il fisico russo Novikov ideò un esperimento concettuale utilizzando una palla di biliardo che entra in una buca in cui è presente una *macchina del tempo* collegata a una seconda buca. In tal modo la pallina “esce nel passato”, implicando l'esistenza di un intervallo temporale che vede la presenza di *due palline* o meglio di due differenti *versioni temporali* della stessa biglia. La pallina uscita dalla macchina del tempo è potenzialmente in grado (a seconda della configurazione cinematica/dinamica del problema) di collidere con il suo “clone”, impedendogli di entrare nella prima buca, cioè nella macchina del tempo, e quindi di determinare l'uscita della seconda pallina. In altri termini, la collisione o meglio l'*auto-collisione*, innesca un *paradosso d'incoerenza*, giacché renderebbe contraddittoria l'esistenza della pallina uscita dalla macchina del tempo.

A partire da un noto principio primo della fisica, Novikov ha dimostrato un **principio di autoconsistenza** che impedisce la realizzazione nel nostro Universo di processi di auto-collisione.

In quest'articolo proponiamo una leggera variante del biliardo di Novikov, ricavando poi una condizione necessaria e sufficiente affinché non si realizzi un processo di auto-collisione.

Capitolo 1

Aspetti matematici della cinematica non relativistica

1.1 Moti unidimensionali

Consideriamo una particella che compie un moto rettilineo. Orientando l'asse x del sistema di riferimento inerziale nella direzione del moto, si ha l'equazione oraria:

$$x = x(t), \quad t \in X = [t_0, t_B] \subseteq [0, +\infty) \quad (1.1)$$

Definizione 1 Chiamiamo **funzione monodroma** una qualunque funzione reale di una variabile reale che sia univocamente definita. Cioè, una funzione monodroma f è una legge che associa a un valore della variabile reale t , uno ed un sol valore $f(t)$.

Nel caso contrario, si ha una **funzione polidroma**.

La funzione (1.1) è manifestamente monodroma, giacché nel caso contrario la particella avrebbe diversi valori dell'ascissa nello stesso istante.

Denotiamo con $\mathcal{U}(X)$ la classe di tutte e sole le funzioni monodrome definite nell'intervallo X (limitato o illimitato). La monodromia sembra, dunque, una condizione essenziale per fornire un'interpretazione fisica a equazioni del tipo (1.1). In vista di applicazioni future, indichiamo con $\mathcal{M}(X)$ l'estensione della classe $\mathcal{U}(X)$ alle funzioni polidrome definite in X :

$$\mathcal{U}(X) \subset \mathcal{M}(X), \quad \forall X \subseteq [0, +\infty) \quad (1.2)$$

Per quanto riguarda la regolarità della funzione $x(t) \in \mathcal{U}(X)$, assumiamo $x(t) \in C^1(X)$ i.e. continua in X ed ivi derivabile con derivata continua. Rammentiamo che se $x(t)$ è una legge oraria, la derivata prima è la velocità scalare. Ne consegue che il corrispondente diagramma orario ovvero il diagramma cartesiano della funzione $x(t)$, è una curva continua e liscia, quindi priva di interruzioni e di punti angolosi.

Definizione 2 Un moto rettilineo è definito da una funzione $x(t) \in C^1(X) \subset \mathcal{U}(X)$, che si dice **legge oraria**, e il suo diagramma cartesiano è il **diagramma orario** del moto.

Osserviamo che una funzione $x(t) \notin C^1(X)$, $x(t) \in \mathcal{U}(X)$ rappresenta ancora un moto rettilineo in cui, però, possono esserci discontinuità della velocità con punti d'infinito dell'accelerazione (Appendice A.1).

Restringendo la nostra attenzione agli elementi di $C^1(X)$, sussiste la seguente definizione:

Definizione 3 Nell'intervallo $[t_1, t_2] \subseteq X$ il moto è **progressivo** se

$$\dot{x}(t) > 0, \quad \forall t \in [t_1, t_2] \quad (1.3)$$

Se invece

$$\dot{x}(t) < 0, \quad \forall t \in [t_1, t_2], \quad (1.4)$$

il moto si dice **retrogrado**.

In altri termini, il moto è progressivo [retrogrado] se la particella si muove nel verso delle x crescenti [decrescenti]. Dalle (1.3)-(1.4) segue che in un qualunque moto progressivo [retrogrado] in $[t_1, t_2]$, la funzione $x(t)$ è ivi strettamente crescente [decrescente]. Tuttavia è possibile rilassare la condizione di disuguaglianza in senso stretto nelle (1.3)-(1.4):

$$\dot{x}(t) \geq 0 \quad [\dot{x}(t) \leq 0], \quad (1.5)$$

inglobando eventuali punti di flesso a tangente orizzontale (punti di arresto senza inversione del moto).

Per un noto teorema di Analisi, si ha che la monotonia in senso stretto in $[t_1, t_2]$ è una condizione necessaria e sufficiente per l'invertibilità locale di $x(t)$, i.e. dell'invertibilità della restrizione di $x(t)$ all'intervallo $[t_1, t_2]$. Inoltre, l'operazione di inversione conserva il tipo di monotonia, ovvero se $x(t)$ è strettamente crescente, anche l'inversa $t(x)$ è strettamente crescente, e viceversa.

Ciò premesso, fissiamo la nostra attenzione a tutti e soli i moti progressivi o retrogradi in X . Per quanto precede, stiamo considerando le funzioni $x(t)$ strettamente crescenti o strettamente decrescenti in X . Tale circostanza ci permette di passare alla funzione inversa $t(x)$ che è definita in $t(X)$ ove quest'ultimo è l'immagine dell'intervallo X attraverso l'applicazione $x(t)$. Precisamente:

$$t(X) = [x_0, x_B], \quad (1.6)$$

dove

$$x_0 = \begin{cases} x(t_0), & \text{se } x(t) \text{ è strettamente crescente} \\ x(t_B), & \text{se } x(t) \text{ è strettamente decrescente} \end{cases}$$

e

$$x_B = \begin{cases} x(t_B), & \text{se } x(t) \text{ è strettamente crescente} \\ x(t_0), & \text{se } x(t) \text{ è strettamente decrescente} \end{cases}$$

In entrambi i casi, cioè se $t(x)$ è strettamente crescente o strettamente decrescente, il tempo "aumenta sempre". Infatti, nel caso di crescita in senso stretto, il diagramma della funzione $t(x)$ ha un andamento del tipo di quello riportato in fig. 1.1. Il moto è progressivo, per cui la particella si sposta nel verso delle x crescenti. Viceversa, se $t(x)$ è strettamente decrescente, si ha l'andamento di fig. 1.2, dove il tempo t aumenta comunque. Precisamente:

$$\dot{x}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} < 0 \quad (1.7)$$

Per il teorema della permanenza del segno:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} < 0 \text{ in un intorno di } \Delta t = 0 \quad (1.8)$$

Siccome il moto è retrogrado ($\Delta x < 0$), affinché sia verificata la disuguaglianza (1.8) deve essere $\Delta t > 0$. Per i dettagli si rimanda all'Appendice A.2.

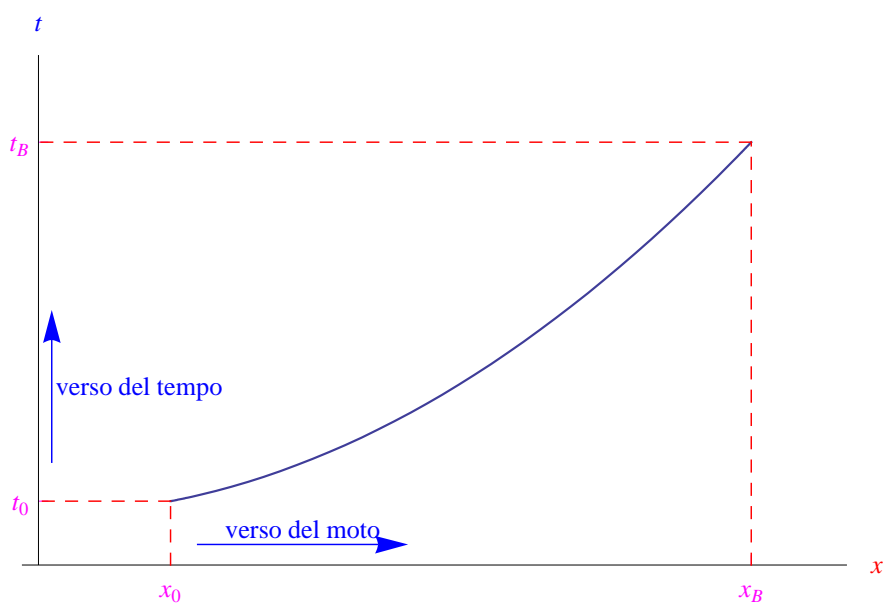


Figura 1.1: Tipico andamento del grafico della funzione $t(x)$ nel caso di moto progressivo.

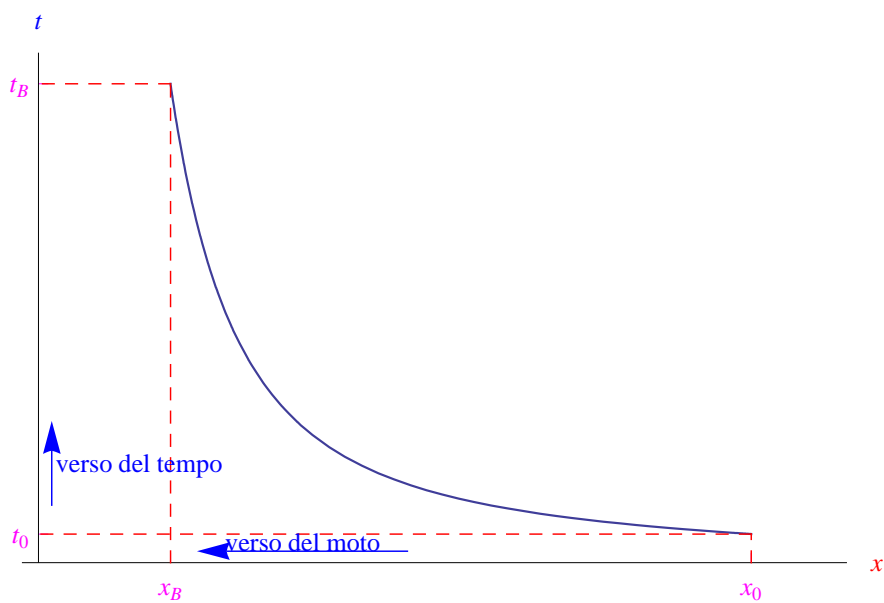


Figura 1.2: Tipico andamento del grafico della funzione $t(x)$ nel caso di moto retrogrado.

Capitolo 2

Una variante del biliardo di Novikov

2.1 Wormhole puntiforme

Consideriamo una palla di biliardo modellizzata da una sferetta omogenea di massa m e raggio $r_\varepsilon \ll \lambda$, ove λ fissa la scala delle lunghezze per ciò che riguarda la traiettoria seguita. In condizioni di idealità, possiamo assumere il moto del centro di massa della sferetta rettilineo ed uniforme, e senza perdita di generalità, progressivo:

$$x(t) = v(t - t_0) + x_0, \quad (v > 0) \quad (2.1)$$

Tale funzione è manifestamente invertibile:

$$t(x) = \frac{x - x_0}{v} + t_0, \quad (2.2)$$

graficata in fig. 2.1.

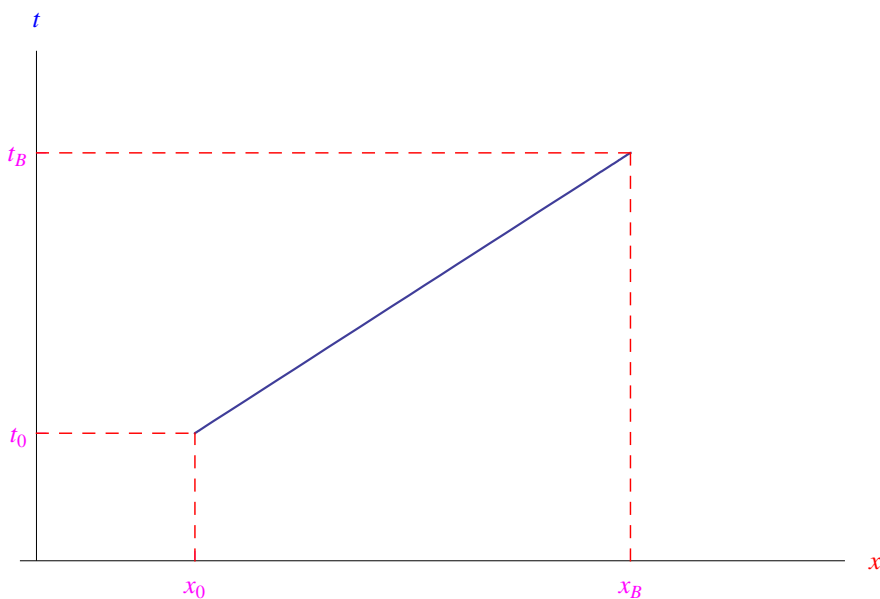


Figura 2.1: Diagramma cartesiano della funzione (2.2).

Supponiamo ora che nel punto $\xi_2 \in (x_0, x_B)$ ci sia un *wormhole puntiforme*, intendendo con tale locuzione un qualunque dispositivo in grado di modificare la variabile t .

Precisamente:

$$t(x) = \begin{cases} \frac{x-x_0}{v} + t_0, & \text{se } x_0 \leq x < \xi_2 \\ \frac{x-\xi_2}{v} + \tau_1, & \text{se } \xi_2 \leq x < x_B \end{cases} \quad (2.3)$$

Il punto ξ_2 è di discontinuità di prima specie per la funzione $t(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow \xi_2^-} t(x) = \tau_2, \quad \lim_{x \rightarrow \xi_2^+} t(x) = \tau_1 < \tau_2,$$

con salto

$$s(\xi_2) = \tau_1 - \tau_2 < 0,$$

come illustrato in fig. 2.2.

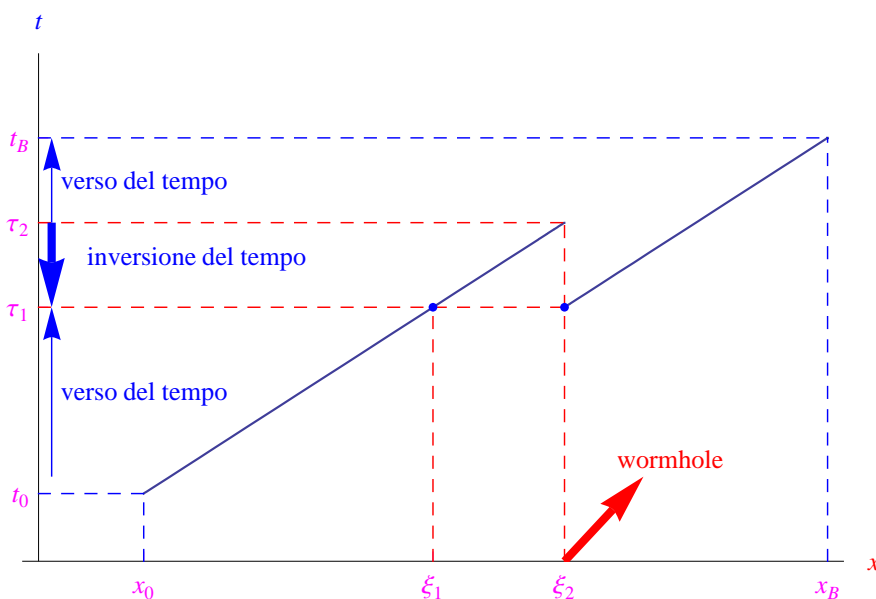


Figura 2.2: Diagramma cartesiano della funzione (2.3).

La funzione (2.3) non è globalmente invertibile, ma lo è solo localmente. Precisamente, sono invertibili le restrizioni di $t(x)$ agli intervalli $[x_0, \xi_2]$ e $[\xi_2, x_B]$ rispettivamente. Infatti:

$$x(t) = \begin{cases} v(t - t_0) + x_0, & \text{se } t_0 \leq t \leq \tau_2 \\ v(t - \tau_1) + \xi_2, & \tau_1 \leq t \leq t_B \end{cases}, \quad (2.4)$$

che non è monodroma (fig. 2.3).

La non monodromia della funzione (2.4) si traduce nella coesistenza per $t \in [\tau_1, \tau_2]$ di due differenti *versioni* della biglia, nel senso che la *pallina 2* è la versione futura della pallina medesima (che nell'intervallo $[\tau_1, \tau_2]$ chiamiamo *pallina 1*). Precisamente, la pallina 2 è la pallina 1 che poi uscirà dal wormhole al tempo τ_2 .

2.2 Auto-collisione

Abbiamo schematizzato il wormhole come un sistema che *shifta* la variabile tempo t , conservando la traiettoria, come mostrato in fig. 2.3. Generalizzando, si può avere un wormhole che restituisce una differente equazione oraria. Ad esempio, supponiamo che la pallina 2 dopo aver attraversato il wormhole, abbia un diagramma orario del tipo di quello riportato

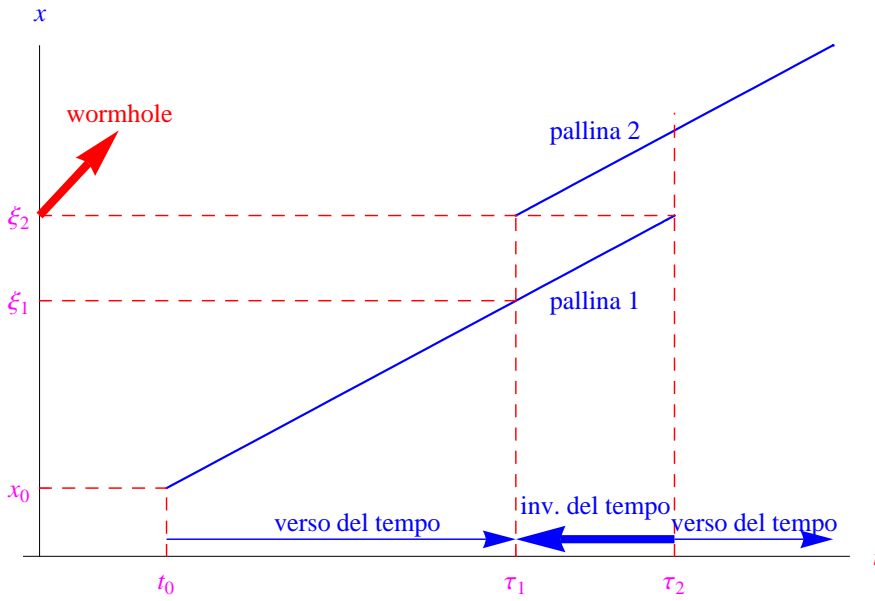


Figura 2.3: Diagramma cartesiano della funzione (2.4).

in fig. 2.4. In tale scenario, la variazione istantanea della quantità di moto della pallina è schematizzabile attraverso un processo d'urto tra la pallina medesima e il wormhole, la cui massa è infinitamente grande. Ne consegue che quest'ultimo resta fermo in seguito all'urto, mentre la pallina è meccanicamente riflessa (oltre che shiftata nel tempo). A sua volta ciò implica l'inversione della quantità di moto e il conseguente urto tra le due versioni della biglia. Tale circostanza suggerisce l'utilizzo della denominazione *auto-collisione* per quanto riguarda questo particolare processo.

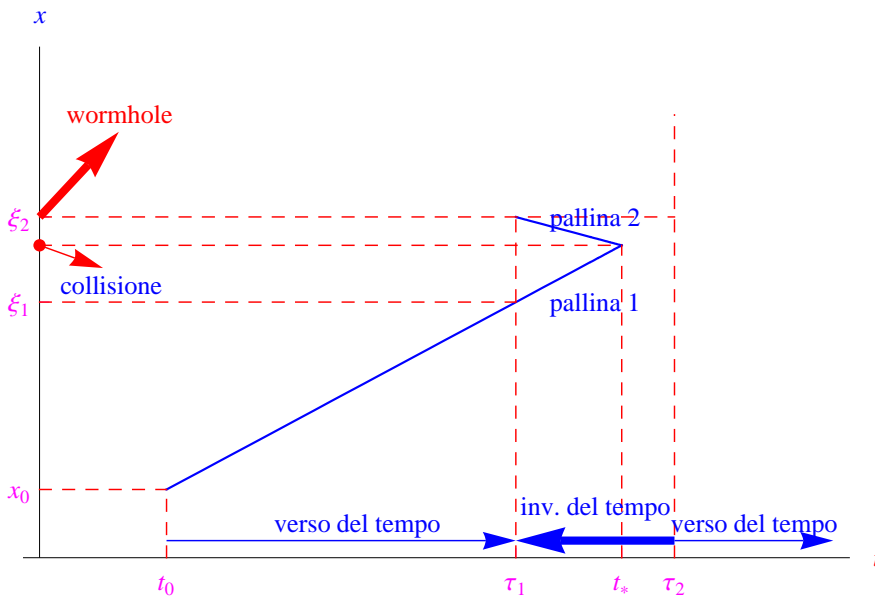


Figura 2.4: Se $v_2 < 0$, le palline entrano in collisione nell'istante $t_* \in (\tau_1, \tau_2)$.

L'auto-collisione implica la non raggiungibilità del wormhole, offrendo un esempio di *paradosso d'incoerenza*, giacché l'esistenza della pallina 2 è una conseguenza dell'attraversa-

mento del wormhole da parte della pallina 1. La predetta argomentazione è una variante di ciò che in letteratura è noto come **paradosso del nonno**.

Per una descrizione più realistica della riflessione meccanica da parte del wormhole, dobbiamo considerare un moto 2-dimensionale, che sarà l'argomento della sezione successiva.

2.3 Il principio di auto-consistenza di Novikov

Il *principio di auto-consistenza di Novikov* [1]-[2] impedisce la realizzazione di auto-collisioni.

Novikov ha dimostrato che il predetto principio è una conseguenza del *principio di minima azione* (noto anche come *principio di Hamilton* [3] o *principio di Ostrogradskij-Hamilton* [4]).

Applichiamo, dunque, il principio di Hamilton al sistema meccanico costituito dalle due palline. Simbologgiando con Σ tale sistema, si ha:

$$\Sigma = \{P_1, P_2\}, \quad (2.5)$$

ove P_1 e P_2 denotano le palline 1 e 2, rispettivamente. Più precisamente:

$$\Sigma = \begin{cases} \{P_1\}, & \text{se } t_0 \leq t < \tau_1 \\ \{P_1, P_2\}, & \text{se } \tau_1 \leq t \leq \tau_2 \\ \{P_2\}, & \text{se } \tau_2 < t \leq t_B \end{cases} \quad (2.6)$$

Per quanto visto nella sezione precedente, dobbiamo considerare un moto 2-dimensionale, assumendo come piano del moto la superficie piana del biliardo. Nel sistema di riferimento inerziale in cui il biliardo è in quiete, le coordinate cartesiane di singola pallina possono essere assunte come coordinate generalizzate di Σ nell'appropriato spazio delle configurazioni. Definiamo quindi il vettore posizione della pallina *k-esima*

$$\mathbf{r}_k = (x_k, y_k), \quad (k = 1, 2)$$

La dipendenza funzionale della lagrangiana di Σ è simbologgiata da:

$$L = \begin{cases} L(t, \mathbf{r}_1, \dot{\mathbf{r}}_1), & \text{se } t_0 \leq t < \tau_1 \\ L(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{r}}_2), & \text{se } \tau_1 \leq t \leq \tau_2 \\ L(t, \mathbf{r}_2, \dot{\mathbf{r}}_2), & \text{se } \tau_2 < t \leq t_B, \end{cases} \quad (2.7)$$

da cui vediamo che lo spazio delle configurazioni di Σ ha una dimensione variabile. Più precisamente, se denotiamo con \mathbf{q} il vettore delle coordinate generalizzate:

$$\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_r), \quad (2.8)$$

si ha

$$r = \begin{cases} 2, & t \in [t_0, \tau_1) \cup (\tau_2, t_B] \\ 4, & t \in [\tau_1, \tau_2] \end{cases} \quad (2.9)$$

Cioè lo spazio delle configurazioni raddoppia la propria dimensionalità in seguito alla comparsa della pallina 2.

La lagrangiana è una funzione reale di $2r + 1$ variabili reali:

$$L(t, q_1, \dots, q_r, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_r) \quad (2.10)$$

Precisamente:

$$L : D \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}$$

$$L : (t, q_1, \dots, q_r, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_r) \in D \times \mathbb{R}^r \rightarrow L(t, q_1, \dots, q_r, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_r) \in \mathbb{R},$$

con $(t, q_1, \dots, q_r) \in D \subseteq \mathbb{R}^{r+1}$, dove D è un dominio internamente connesso. Dal momento che sono assegnati gli istanti iniziale e finale, rispettivamente dati da t_0 e t_B , restano univocamente determinati i punti dello spazio euclideo \mathbb{R}^{r+1} :

$$A \left(t_0, q_1^{(0)}, q_2^{(0)}, \dots, q_r^{(0)} \right), \quad B \left(t_B, q_1^{(B)}, q_2^{(B)}, \dots, q_r^{(B)} \right) \in \mathring{D}$$

Per quanto precede

$$\left(q_1^{(0)}, q_2^{(0)}, \dots, q_r^{(0)} \right) = (x_1(t_0), y_1(t_0)), \quad (\text{posizione iniziale della pallina 1})$$

$$\left(q_1^{(B)}, q_2^{(B)}, \dots, q_r^{(B)} \right) = (x_2(t_B), y_2(t_B)), \quad (\text{posizione finale della pallina 2})$$

Poniamo

$$\mathbf{q}^{(0)} = (x_1(t_0), y_1(t_0)) \in \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{q}^{(B)} = (x_2(t_B), y_2(t_B)) \in \mathbb{R}^2$$

che definiscono, rispettivamente, la *configurazione iniziale* e la *configurazione finale* di Σ nello spazio delle configurazioni. L'integrale d'azione di Σ è il funzionale:

$$S(\mathbf{q}) = \int_{t_0}^{t_B} L[t, \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)] dt \quad (2.11)$$

Per il principio di minima azione (noto anche come *principio di Hamilton*) il moto naturale del sistema è quello che rende minimo il funzionale (2.11). D'altra parte, la ricerca di un sistema di funzioni

$$[q_1(t), \dots, q_r(t)]$$

che sia un estremante di $S(\mathbf{q})$ conduce alle equazioni di Eulero-Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, r) \quad (2.12)$$

Come è noto, se la lagrangiana è sufficientemente regolare, il sistema di equazioni differenziali (2.12) è esprimibile in forma normale:

$$\ddot{q}_k = \chi_k(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \quad (k = 1, 2, \dots, r), \quad (2.13)$$

con χ_k funzioni note. Dal momento che abbiamo assegnato lo stato meccanico iniziale $(\mathbf{q}^{(0)}, \dot{\mathbf{q}}^{(0)})$ di Σ , si ha il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \ddot{q}_k = \chi_k(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) & (k = 1, 2, \dots, r) \\ \mathbf{q}(t_0) = \mathbf{q}^{(0)}, \dot{\mathbf{q}}(t_0) = \dot{\mathbf{q}}^{(0)} \end{cases}, \quad (2.14)$$

dove $\dot{\mathbf{q}}^{(0)} = (\dot{x}_1(t_0), \dot{y}_1(t_0))$ è il vettore delle velocità generalizzate di Σ . Dalla regolarità di $L(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ ci aspettiamo una "sufficiente regolarità" delle funzioni $\chi_k(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ da poter applicare il teorema di esistenza ed unicità che nel caso in esame, restituisce:

$$\exists! \mathbf{q}(t) \in C^p([t_0, t_B]) \mid \ddot{q}_k(t) = \chi_k[\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t], \quad \mathbf{q}(t_0) = \mathbf{q}^{(0)}, \dot{\mathbf{q}}(t_0) = \dot{\mathbf{q}}^{(0)} \quad (2.15)$$

Qui è $p \geq 1$, onde l'unica soluzione $\mathbf{q}(t)$ è continua in $[t_0, t_B]$ ed è ivi dotata di derivate continue fino all'ordine p .

A questo punto non dobbiamo fare altro che esplicitare la lagrangiana. Nell'intervallo di tempo $[t_0, \tau_1]$ è $\Sigma = \{P_1\}$, e poiché abbiamo un moto libero non relativistico, la lagrangiana è

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}_1^2 \equiv L(\dot{\mathbf{r}}), \quad (2.16)$$

onde le equazioni di Eulero-Lagrange si scrivono:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \right) = \mathbf{0} \quad (2.17)$$

Dalla (2.16):

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = 2m\dot{\mathbf{r}}_1,$$

che sostituita nella precedente:

$$m\ddot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{0}, \quad (2.18)$$

Cioè P_1 compie un moto rettilineo ed uniforme. Alla medesima conclusione si giunge per $t \in (\tau_2, t_B]$:

$$m\ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{0} \quad (2.19)$$

L'intervallo di interesse fisico è $[\tau_1, \tau_2]$. Le palline (sferette rigide di raggio r_ε) possono al più collidere, per cui sono soggette a un potenziale a corto range dipendente solo dalla distanza relativa. Lasciando inespreso tale potenziale, la lagrangiana si scrive:

$$L(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{r}}_2) = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}_2^2 - V(|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|) \quad (2.20)$$

La dipendenza di V da $|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$ suggerisce di passare al sistema di riferimento del centro di massa e della coordinata relativa, rispettivamente definiti dalle

$$\begin{cases} \mathbf{R} = \frac{m\mathbf{r}_1 + m\mathbf{r}_2}{m+m} = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2) \\ \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \end{cases} \quad (2.21)$$

Invertendo tali relazioni:

$$\begin{cases} \mathbf{r}_1 = \frac{1}{2}(2\mathbf{R} - \mathbf{r}) \\ \mathbf{r}_2 = \frac{1}{2}(2\mathbf{R} + \mathbf{r}) \end{cases} \quad (2.22)$$

Passando alle coordinate generalizzate (\mathbf{R}, \mathbf{r}) la lagrangiana diventa:

$$L(r, \dot{\mathbf{R}}, \dot{\mathbf{r}}) = \frac{1}{8} \left(2\dot{\mathbf{R}} - \dot{\mathbf{r}} \right)^2 + \frac{1}{8} \left(2\dot{\mathbf{R}} + \dot{\mathbf{r}} \right)^2 - V(r) \quad (2.23)$$

E quindi le equazioni di Eulero-Lagrange

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{R}}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{R}}} \right) = \mathbf{0} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \right) = \mathbf{0} \end{cases} \quad (2.24)$$

Calcoliamo

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{R}}} = \frac{1}{2}m \left(2\dot{\mathbf{R}} - \dot{\mathbf{r}} \right) + \frac{1}{2}m \left(2\dot{\mathbf{R}} + \dot{\mathbf{r}} \right) = m\dot{\mathbf{R}},$$

onde dalla prima delle (2.24)

$$\frac{d}{dt} \left(m\dot{\mathbf{R}} \right) = \mathbf{0} \implies \ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{0} \quad (2.25)$$

Cioè il centro di massa di $\Sigma = \{P_1, P_2\}$ compie un moto rettilineo ed uniforme. Questo risultato non deve sorprendere, in virtù di un noto teorema [3]:

Teorema 4 *Il centro di massa di un sistema di particelle sottoposte solo a forze interne (cioè a una interazione particella-particella) o è fermo o si muove di moto rettilineo ed uniforme rispetto al sistema di riferimento inerziale in cui si osserva il moto.*

Derivando la (2.23) rispetto a $\dot{\mathbf{r}}$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = \mu \dot{\mathbf{r}},$$

dove

$$\mu = \frac{m}{2}$$

è la massa ridotta di Σ . Dalla seconda delle (2.24):

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = -\nabla_{\mathbf{r}} V(r), \quad (2.26)$$

essendo $\nabla_{\mathbf{r}}$ l'operatore gradiente rispetto alle componenti di $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \stackrel{def}{=} (x, y)$:

$$\nabla_{\mathbf{r}} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad (2.27)$$

Quindi

$$\nabla_{\mathbf{r}} V(r) = \left(\frac{\partial V(r)}{\partial x}, \frac{\partial V(r)}{\partial y} \right)$$

Dal momento che $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\frac{\partial V(r)}{\partial x} = V'(r) \frac{\partial r}{\partial x} = V'(r) \frac{x}{r},$$

avendo denotato con $'$ l'operazione di derivazione rispetto a r . In maniera simile:

$$\frac{\partial V(r)}{\partial y} = V'(r) \frac{y}{r}$$

Cioè

$$\nabla_{\mathbf{r}} V(r) = V'(r) \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad (2.28)$$

che sostituita nella (2.26) porge

$$m \ddot{\mathbf{r}} = -2V'(r) \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (2.29)$$

Abbiamo trovato:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{2}{m} V'(r) \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad (2.30)$$

che in termini di massa ridotta $\mu = m/2$ si scrive:

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = -V'(r) \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (2.31)$$

Tale equazione regola il moto di una particella di massa μ , rispetto al sistema di riferimento in cui il centro di massa è in quiete. Per quanto precede, tale sistema di riferimento è inerziale. Per un assegnato potenziale centrale $V(r)$ e per una data condizione iniziale

$$\mathbf{r}(\tau_1) \equiv \mathbf{r}_0, \quad \dot{\mathbf{r}}(\tau_1) \equiv \dot{\mathbf{r}}_0, \quad (2.32)$$

si ottiene, integrando la (2.31), l'equazione oraria del moto relativo:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \quad t \in [\tau_1, \tau_2] \quad (2.33)$$

e dalle (2.22) l'equazione oraria del moto di singola pallina i.e. la rappresentazione parametrica della traiettoria di P_1 e P_2 rispettivamente

$$\mathbf{r}_1(t) = 2\mathbf{R}(t) - \frac{1}{2}\mathbf{r}(t), \quad \mathbf{r}_2(t) = 2\mathbf{R}(t) + \frac{1}{2}\mathbf{r}(t), \quad t \in [\tau_1, \tau_2] \quad (2.34)$$

A questo punto dobbiamo esplicitare l'energia potenziale $V(r)$. Per ipotesi le palline possono al più collidere, per cui $V(r)$ deve riprodurre un urto che può essere considerato elastico. A tale scopo definiamo la funzione:

$$f_{r_\varepsilon}(r) = \frac{1}{r_\varepsilon} \theta(r_\varepsilon - r),$$

dove r_ε è il raggio di singola pallina, mentre θ è la **funzione di Heaviside**, per cui

$$f_{r_\varepsilon}(r) = \begin{cases} \frac{1}{r_\varepsilon}, & \text{se } 0 \leq r < r_\varepsilon \\ 0, & \text{se } r > r_\varepsilon \end{cases} \quad (2.35)$$

ed è graficata in fig. 2.5.

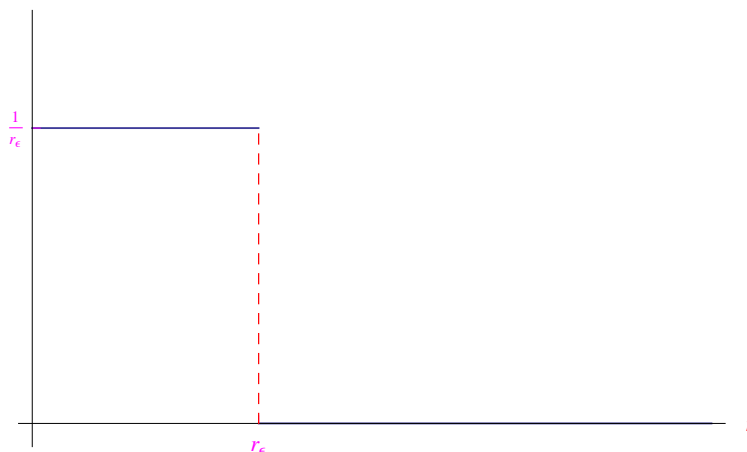


Figura 2.5: Andamento del grafico della funzione (2.35).

Evidentemente:

$$\lim_{r_\varepsilon \rightarrow 0} f_{r_\varepsilon}(r) = \delta(r), \quad (2.36)$$

dove δ è la funzione delta di Dirac. Ne consegue che la funzione

$$V(r) = V_0 f_{r_\varepsilon}(r), \quad (2.37)$$

con $V_0 > 0$ avente le dimensioni di un'energia per una lunghezza, simula una barriera di potenziale che nel limite di pallina puntiforme è deltiforme, i.e. infinitamente alta:

$$\lim_{r_\varepsilon \rightarrow 0} V(r) = V_0 \delta(r) \quad (2.38)$$

Ciò premesso, studiamo il moto della massa ridotta μ nel sistema di riferimento inerziale in cui il centro di massa è in quiete. Precisamente, fissiamo una terna $Oxyz$ con l'origine nel

centro di massa e gli assi xy paralleli agli omonimi assi coordinati del sistema di riferimento in cui il biliardo è in quiete. Per quanto detto, la massa ridotta si muove nel campo di forze centrali:

$$\mathbf{F}(r) = -\nabla_{\mathbf{r}}V(r) = -V'(r)\frac{\mathbf{r}}{r} \quad (2.39)$$

il cui momento rispetto a O è manifestamente nullo

$$\mathbf{M}(r) = \mathbf{r} \wedge \mathbf{F}(r) = -\frac{V'(r)}{r}\mathbf{r} \wedge \mathbf{r} = \mathbf{0} \quad (2.40)$$

Ciò implica la conservazione del momento angolare

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{p} = \mu(\mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{r}}) \quad (2.41)$$

Cioè

$$\mathbf{L}(t) = \mathbf{L}_0, \quad \forall t \in [\tau_1, \tau_2]$$

Tenendo conto delle (2.32)

$$\mathbf{L}_0 = \mathbf{L}(\tau_1) = \mu(\mathbf{r}_0 \wedge \dot{\mathbf{r}}_0), \quad (2.42)$$

risultando ortogonale al piano coordinato xy i.e. al piano del moto:

$$\mathbf{L}_0 = (0, 0, L_{0,z})$$

Nell'espressione di \mathbf{L}_0 (eq. (2.42)) i vettori \mathbf{r}_0 , $\dot{\mathbf{r}}_0$ sono rispettivamente la posizione relativa e la velocità relativa nell'istante τ_1 di ingresso nel wormhole:

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_2(\tau_1) - \mathbf{r}_1(\tau_1), \quad \dot{\mathbf{r}}_0 = \dot{\mathbf{r}}_2(\tau_1) - \dot{\mathbf{r}}_1(\tau_1),$$

cosicché la (2.42) si scrive:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_0 &= \mu [\mathbf{r}_2(\tau_1) - \mathbf{r}_1(\tau_1)] \wedge [\dot{\mathbf{r}}_2(\tau_1) - \dot{\mathbf{r}}_1(\tau_1)] \\ &= \mu [\mathbf{r}_2(\tau_1) \wedge \dot{\mathbf{r}}_2(\tau_1) - \mathbf{r}_2(\tau_1) \wedge \dot{\mathbf{r}}_1(\tau_1) + \mathbf{r}_1(\tau_1) \wedge \dot{\mathbf{r}}_1(\tau_1) - \mathbf{r}_1(\tau_1) \wedge \dot{\mathbf{r}}_2(\tau_1)] \end{aligned} \quad (2.43)$$

Se $\mathbf{L}_k(\tau_1)$ è il momento angolare della k -esima pallina ($k = 1, 2$) nell'istante τ_1 :

$$\mathbf{r}_k(\tau_1) \wedge \dot{\mathbf{r}}_k(\tau_1) = \frac{1}{m}(\tau_1), \quad (k = 1, 2)$$

Ma nell'intervallo $[t_0, \tau_1]$ la traiettoria della pallina 1 è rettilinea, per cui $L_1(\tau_1) = \mathbf{0}$, e ci aspettiamo altrettanto per la "copia" $\implies L_2(\tau_1) = \mathbf{0}$. In tal modo la (2.43) restituisce:

$$\mathbf{L}_0 = -\mu [\mathbf{r}_2(\tau_1) \wedge \dot{\mathbf{r}}_1(\tau_1) + \mathbf{r}_1(\tau_1) \wedge \dot{\mathbf{r}}_2(\tau_1)] \quad (2.44)$$

L'unica componente eventualmente non nulla è quella secondo l'asse z :

$$L_{0,z} = -\mu [\mathbf{r}_2(\tau_1) \wedge \dot{\mathbf{r}}_1(\tau_1) + \mathbf{r}_1(\tau_1) \wedge \dot{\mathbf{r}}_2(\tau_1)]_z, \quad (2.45)$$

da cui vediamo che $L_{0,z} = 0$ o $L_{0,z} \neq 0$ a seconda di come sono disposte le due traiettorie (rettilinee) l'una rispetto all'altra, nell'istante di ingresso del wormhole. In ambedue i casi, l'interazione tra le due biglie conserva il valore di $L_{0,z}$. Passiamo alle coordinate polari nel piano xy :

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi \quad (2.46)$$

La componente z del momento angolare in coordinate cartesiane è

$$L_{0,z} = \mu (xy' - x'y)$$

Tenendo conto delle (2.46) e ricavando le derivate rispetto al tempo, si ha la seguente espressione in coordinate polari:

$$L_{0,z} = \mu r^2 \dot{\varphi}^2 \equiv \mu r_0^2 \dot{\varphi}_0^2, \quad \varphi_0 = \varphi(\tau_1) \quad (2.47)$$

Passiamo dalla base canonica $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ dello spazio R^2 in cui si svolge il moto, alla base ortonormale $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi\}$ i cui elementi sono

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= (\cos \varphi) \mathbf{i} + (\sin \varphi) \mathbf{j}, & (\text{versore radiale}) \\ \mathbf{e}_\varphi &= (-\sin \varphi) \mathbf{i} + (\cos \varphi) \mathbf{j}, & (\text{versore tangenziale}) \end{aligned} \quad (2.48)$$

Quindi scriviamo l'equazione differenziale (vettoriale) del moto

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = -V'(r) \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (2.49)$$

Nella base $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi\}$. Abbiamo $\dot{\varphi}$

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= r \mathbf{e}_r \implies \dot{\mathbf{r}} = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\mathbf{e}}_r \\ &= (\dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi) \mathbf{i} + (\dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi) \mathbf{j} \\ \implies \ddot{\mathbf{r}} &= (\ddot{r} \cos \varphi - 2\dot{r}\dot{\varphi} \sin \varphi - r\ddot{\varphi} \sin \varphi - r\dot{\varphi}^2 \cos \varphi) \mathbf{i} + \\ &+ (\ddot{r} \sin \varphi + 2\dot{r}\dot{\varphi} \cos \varphi + r\ddot{\varphi} \cos \varphi - r\dot{\varphi}^2 \sin \varphi) \mathbf{j} \end{aligned}$$

Immettendo nella (2.49):

$$\begin{cases} \mu [(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) \cos \varphi - (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) \sin \varphi] = -V'(r) \cos \varphi \\ \mu [(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) \sin \varphi - (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) \cos \varphi] = -V'(r) \sin \varphi \end{cases} \quad (2.50)$$

Ma

$$2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r\dot{\varphi}^2) = \frac{1}{r} \frac{dL_{0,z}}{dt} = 0,$$

per cui il sistema precedente si riduce a

$$\mu (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) \sin \varphi = -V'(r) \sin \varphi, \quad (2.51)$$

che per $\sin \varphi \neq 0$ diventa

$$\mu (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = -V'(r),$$

che può essere scritta come

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = -V'_{eff}(r), \quad (2.52)$$

avendo definito il **potenziale efficace**

$$V_{eff}(r) = V(r) + \frac{L_{0,z}^2}{2\mu r^2} \quad (2.53)$$

Pertanto il moto 2-dimensionale della massa ridotta nel potenziale centrale $V(r)$ equivale al moto 1-dimensionale della stessa massa ridotta nel potenziale efficace (2.53). Inoltre, il sistema è manifestamente conservativo, per cui l'energia meccanica è una costante del moto:

$$E = \frac{1}{2} \mu \dot{\mathbf{r}}^2 + V(r) = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + V_{eff}(r) \quad (2.54)$$

Nel caso in esame, il potenziale efficace si scrive:

$$V_{eff}(r) = \frac{V_0}{r_\varepsilon} \theta(r_\varepsilon - r) + \frac{L_{0,z}}{2\mu r^2} \quad (2.55)$$

D'altra parte, l'energia meccanica è univocamente determinata dalle condizioni iniziali (2.32), per cui

$$E_0 = \frac{1}{2} \mu \dot{r}_0^2 + \frac{V_0}{r_\varepsilon} \theta(r_\varepsilon - r_0) + \frac{L_{0,z}}{2\mu r_0^2}$$

Osservando che $r_0 > r_\varepsilon$

$$E_0 = \frac{1}{2} \mu \dot{r}_0^2 + \frac{L_{0,z}}{2\mu r_0^2} \geq 0, \quad \forall (r_0, \dot{r}_0) \in \mathbb{R}^2 \quad (2.56)$$

Dalla (2.54):

$$\frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + V_{eff}(r) = E_0 \geq 0 \implies \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 = E_0 - V_{eff}(r)$$

Ma

$$\frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 \geq 0, \quad \forall \dot{r} \in \mathbb{R}$$

per cui

$$E_0 - V_{eff}(r) \geq 0 \quad (2.57)$$

L'insieme delle soluzioni di tale disequazione

$$\Lambda(E_0, L_{0,z}) = \{r \in [0, +\infty) \mid E_0 - V_{eff}(r) \geq 0\},$$

definisce la **regione classicamente accessibile**. Per determinare tale regione, esplicitiamo il potenziale efficace tenendo conto della (2.55):

$$V_{eff}(r) = \begin{cases} \frac{V_0}{r_\varepsilon} + \frac{L_{0,z}}{2\mu r^2}, & \text{se } 0 \leq r < r_\varepsilon \\ \frac{L_{0,z}}{2\mu r^2}, & \text{se } r > r_\varepsilon \end{cases}, \quad (2.58)$$

che ha una discontinuità di prima specie in $r = r_\varepsilon$:

$$\lim_{r \rightarrow r_\varepsilon^-} V_{eff}(r) = \frac{V_0}{r_\varepsilon} + \frac{L_{0,z}}{2\mu r_\varepsilon^2}, \quad \lim_{r \rightarrow r_\varepsilon^+} V_{eff}(r) = \frac{L_{0,z}}{2\mu r_\varepsilon^2},$$

come mostrato in fig. 2.6.

Una condizione necessaria e sufficiente affinché non ci sia una auto-collisione è

$$\Lambda(E_0, L_{0,z}) = [r_{\min}, +\infty), \quad r_{\min} > r_\varepsilon \quad (2.59)$$

dove r_{\min} è la minima distanza tra le palline. Cioè

$$\nexists \text{ auto-collisione} \iff \Lambda(E_0, L_{0,z}) = [r_{\min}, +\infty), \quad r_{\min} > r_\varepsilon$$

Dalla fig. 2.6

$$\exists r_{\min} > r_\varepsilon \iff E_0 < \frac{L_{0,z}}{2\mu r_\varepsilon^2}$$

Tenendo conto della (2.56) e passando dalla massa ridotta μ alla massa di singola pallina m :

$$|L_{0,z}| > \frac{\dot{r}_0 r_0}{2\sqrt{\left(\frac{r_0}{r_\varepsilon}\right)^2 - 1}} \quad (2.60)$$

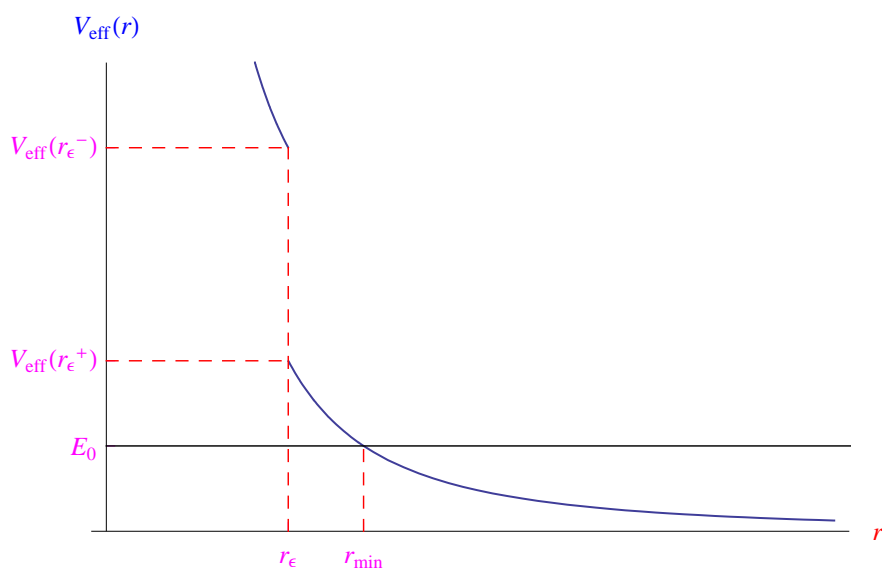


Figura 2.6: Andamento del potenziale efficace.

Appendice A

Dettagli matematici

A.1 Diagrammi frattali

Si consideri il seguente elemento di $\mathcal{U}(X)$:

$$x(t) = \begin{cases} v_1 t, & \text{se } t_0 \leq t < t_1 \\ v_2 t, & \text{se } t_1 < t \leq t_B \end{cases}, \quad (v_1 < v_2) \quad (\text{A.1})$$

Tale funzione è manifestamente non derivabile in t_1 , ma lo è a sinistra e a destra. Precisamente, utilizzando la notazione puntata per denotare l'operazione di derivazione:

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} v_1, & \text{se } t_0 \leq t < t_1 \\ v_2, & \text{se } t_1 < t \leq t_B \end{cases}, \quad (\text{A.2})$$

per cui t_1 è un punto di discontinuità di prima specie per la funzione $\dot{x}(t)$, ed è un punto di infinito per $\ddot{x}(t)$:

$$\ddot{x}(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t \in [t_0, t_B] - \{t_1\} \\ +\infty, & \text{se } t = t_1 \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

Introducendo la funzione delta di Dirac:

$$\ddot{x}(t) = A\delta(t - t_1), \quad (\text{A.4})$$

essendo $A > 0$ una costante con le dimensioni di una velocità¹. L'esistenza di una discontinuità di prima specie di $\dot{x}(t)$ in t_1 , implica che al tempo t_1 la velocità scalare cambia istantaneamente. Se abbiamo N punti di discontinuità di prima specie, la (A.4) si generalizza nel **pettine di Dirac di ordine N** :

$$\ddot{x}_N(t) \stackrel{def}{=} \sum_{k=0}^N A_k \delta(t - t_k) \quad (\text{A.5})$$

Senza perdita di generalità, assumiamo che i punti di discontinuità t_k siano equidistanti:

$$t_k = k \frac{t_B - t_N}{N}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots, N),$$

per cui il pettine di Dirac si riscrive:

$$\ddot{x}_N(t) = \sum_{k=0}^N A_k \delta(t - t_k) \quad (\text{A.6})$$

¹Si ricordi che la funzione delta di Dirac ha le dimensioni del reciproco del suo argomento.

Nulla ci impedisce di eseguire al secondo membro della (A.6) l'operazione di passaggio al limite per $N \rightarrow +\infty$

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^N A_k \delta(t - t_k),$$

che è manifestamente un pettine di Dirac con la potenza del continuo. Segue:

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^N A_k \delta(t - t_k) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \ddot{x}_N(t) \quad (\text{A.7})$$

Posto

$$x_\infty(t) \in \mathcal{U}(X) \mid \ddot{x}_\infty(t) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \ddot{x}_N(t),$$

si ha che la funzione $x_\infty(t)$ riesce continua in X ma non derivabile in tutto X . Più precisamente, $\dot{x}_\infty(t)$ ha una discontinuità di prima specie in ogni punto di X . Il diagramma cartesiano di $x_\infty(t)$ è una curva continua ma infinitamente spigolosa, nota come *cuva di Koch generalizzata*.

A.2 Rapporto incrementale e il teorema della permanenza del segno

Nel caso della funzione $x(t)$ l'incremento si scrive

$$\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t), \quad (\text{A.8})$$

che per un assegnato t è una funzione di Δt :

$$\begin{aligned} \Delta x &: E_t \rightarrow \mathbb{R} \\ \Delta x &: \Delta t \rightarrow \Delta x(\Delta t), \quad \forall \Delta t \in E_t, \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

ove

$$E_t = \{\Delta t \in \mathbb{R} \mid (t + \Delta t) \in X\},$$

riuscendo:

$$X \text{ è un intervallo} \implies E_t \neq \emptyset$$

La funzione $\Delta x(\Delta t)$ (eq. A.9) è manifestamente un infinitesimo in $\Delta t = 0$:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta x = 0$$

Di maggior interesse è il *rapporto incrementale*:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}, \quad (\text{A.10})$$

che è una funzione di Δt :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta x}{\Delta t} &: E'_t \rightarrow \mathbb{R} \\ \frac{\Delta x}{\Delta t} &: \Delta t \rightarrow \frac{\Delta x}{\Delta t}(\Delta t), \quad \forall \Delta t \in E'_t, \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

essendo $E'_t = E_t - \{\Delta t = 0\}$. Il punto $\Delta t = 0$ è di accumulazione per E'_t , onde ha senso studiare il comportamento della funzione (A.11) in un intorno di tale punto, ovvero eseguire l'operazione di passaggio al limite:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (\text{A.12})$$

Se tale limite esiste finito, cioè se la funzione $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ (eq. A.11) è convergente in $\Delta t = 0$, si dice che la funzione x è *derivabile* in x_0 e il limite (A.12) si denota con $f'(x_0)$:

$$f \text{ è derivabile in } x_0 \iff \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) \in \mathbb{R}$$

Se tale circostanza si verifica in *ogni* punto di X , diremo che la funzione f è derivabile in X . Tale operazione dà luogo a una nuova funzione che denotiamo con $f'(x)$:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

che si chiama *derivata prima* di f . Oltre alla notazione apicale (o di Lagrange) è spesso utilizzata la notazione differenziale (o di Leibnitz):

$$\frac{d}{dx} f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Esempio 5 Determiniamo la derivata di $\sin x$ in $x_0 \in \mathbb{R}$.

Svolgimento

Dobbiamo calcolare il limite:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0}{\Delta x},$$

che chiaramente si presenta sotto la forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Per rimuovere l'indeterminazione sviluppiamo il numeratore con le formule di prostaferesi:

$$\begin{aligned} \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0 &= 2 \sin\left(\frac{x_0 + \Delta x - x_0}{2}\right) \cos\left(\frac{x_0 + \Delta x + x_0}{2}\right) \\ &= 2 \sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right) \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right), \end{aligned}$$

onde:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right) \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \underbrace{\left[\frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}} \right]}_{=1} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) \\ &= \cos x_0 \end{aligned}$$

E per ogni $x_0 \equiv x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$$

È istruttivo confrontare per via grafica il rapporto incrementale $\frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x}$ con la funzione $\cos x$. Più precisamente, consideriamo la funzione di x :

$$g_{\Delta x}(x) = \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x}, \quad (\text{A.13})$$

A.3 Urto centrale

Denotiamo con $x_1(t)$ e $x_2(t)$ le ascisse dei rispettivi centri di massa di 1 e 2 nell'intervallo $[\tau_1, \tau_2]$:

$$\begin{cases} x_1(t) = v_1(t - \tau_1) + \xi_1 \\ x_2(t) = v_2(t - \tau_1) + \xi_2, \quad (\xi_2 > \xi_1) \end{cases}, \quad t \in [\tau_1, \tau_2]$$

dove $v_1 \equiv v$, i.e. la velocità della pallina nell'intervallo $t \geq t_0$. Riesce

$$v_2 < 0 \implies \exists t_* \in (\tau_1, \tau_2) \mid x_1(t_*) = x_2(t_*)$$

Cioè le palline collidono nell'istante t_x . Per quanto precede, abbiamo modellizzato le palline attraverso due sferette rigide omogenee di massa m . Il sistema composto da tali sferette non è soggetto a forze esterne, per cui conserva la quantità di moto. Precisamente, scriviamo la quantità di moto del sistema prima dell'urto:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = m\mathbf{v}_1 + m\mathbf{v}_2 \quad (\text{A.14})$$

La quantità di moto del sistema dopo l'urto è

$$\mathbf{p}' = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 = m\mathbf{v}'_1 + m\mathbf{v}'_2, \quad (\text{A.15})$$

essendo \mathbf{v}'_1 e \mathbf{v}'_2 le velocità delle palline dopo l'urto. Quindi

$$m\mathbf{v}_1 + m\mathbf{v}_2 = m\mathbf{v}'_1 + m\mathbf{v}'_2 \quad (\text{A.16})$$

Nell'ipotesi di urto elastico, si conserva l'energia cinetica, per cui dobbiamo aggiungere alla precedente l'equazione:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}mv_1'^2 + \frac{1}{2}mv_2'^2 \quad (\text{A.17})$$

Se ora teniamo conto del fatto che il moto è unidimensionale, possiamo considerare in luogo della (??) la corrispondente equazione scalare

$$mv_1 + mv_2 = mv_1' + mv_2'$$

In definitiva si ottiene il sistema di equazioni nelle incognite v_1', v_2'

$$\begin{cases} v_1' + v_2' = v_1 + v_2 \\ v_1'^2 + v_2'^2 = v_1^2 + v_2^2 \end{cases} \quad (\text{A.18})$$

equivalente a

$$\begin{cases} (v_1' + v_2')^2 = (v_1 + v_2)^2 \\ v_1'^2 + v_2'^2 = v_1^2 + v_2^2 \end{cases} \iff \begin{cases} v_1'^2 + v_2'^2 + 2v_1'v_2' = v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2 \\ v_1'^2 + v_2'^2 = v_1^2 + v_2^2 \end{cases}$$

Sottraendo membro a membro

$$v_1'v_2' = v_1v_2$$

Assumendo $v_1' \neq 0$ i.e. la pallina 2 non si ferma in seguito all'urto:

$$v_2' = \frac{v_1v_2}{v_1'} \quad (\text{A.19})$$

che sostituita nella prima delle (??):

$$v_1' - (v_1 + v_2) v_1' + v_1 v_2 = 0,$$

ovvero un'equazione quadratica in v_1' :

$$v_1' = \begin{cases} v_1 \\ v_2 \end{cases} \quad (\text{A.20})$$

In definitiva si ottengono due coppie di soluzioni, e quella di interesse fisico è

$$v_1' = v_2, \quad v_2 = v_1 \quad (\text{A.21})$$

Cioè le palline si scambiano la velocità. Dal momento che è necessariamente (affinché si verifichi l'urto) $v_2 < 0$, si ha $v_1 < 0$ i.e. la pallina 1 inverte il proprio moto, e poiché quest'ultimo è unidimensionale, non raggiunge il wormhole come illustrato nel diagramma orario riportato in fig. 2.4).

$$x = vt, \quad t \in [0, t_B], \quad (\text{A.22})$$

dove v è il modulo della velocità della pallina, mentre $t = 0$ è l'istante di lancio e t_B l'istante dell'urto con uno dei bordi .

Dal momento che stiamo lavorando nel paradigma della RR, passiamo alla corrispondente linea di universo (fig. A.1) ottenuta determinando la funzione inversa di $x(t)$:

$$ct = \frac{c}{v}x, \quad x \in [0, x_B], \quad (\text{A.23})$$

essendo $x_B = vt_B$.

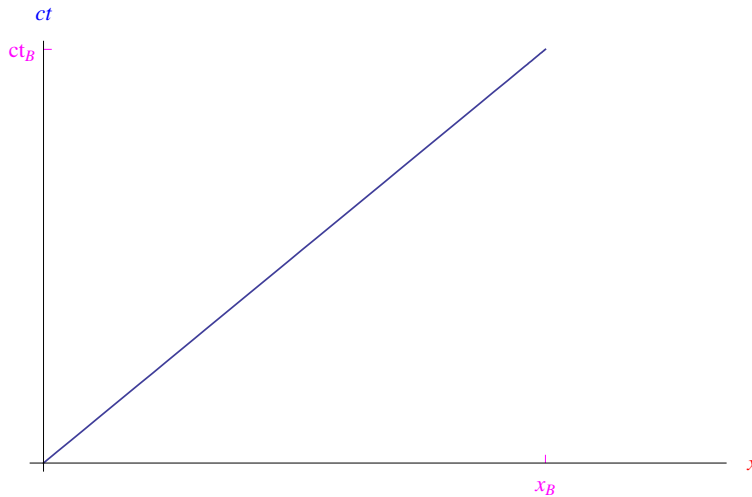


Figura A.1: Linea di universo della palla di biliardo lanciata da \mathcal{G} a $t = 0$.

Riprendiamo l'equazione oraria (A.22). Dal punto di vista della Geometria differenziale, la predetta equazione è una rappresentazione parametrica della traiettoria della pallina. A rigore, tale circostanza si verifica in più dimensioni:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad \text{etc.}$$

Tuttavia, ciò che è importante notare è il ruolo di parametro (nella base $[0, t_B]$) svolto dal tempo t misurato dal giocatore \mathcal{G} . Come è noto, per un'assegnata traiettoria regolare, esistono infinite rappresentazioni parametriche, e ciascuna di esse può essere ottenuta riparametrizzando attraverso la sostituzione:

$$t \rightarrow \theta = \theta(t), \quad \forall t \in [0, t_B], \quad (\text{A.24})$$

dove $\theta(t)$ è una funzione sufficientemente regolare e priva di punti critici. Precisamente:

1. $\theta(t) \in C^1(\Theta)$, essendo $\Theta = \theta([0, t_B])$.
2. $\frac{d}{dt}\theta(t) \neq 0, \quad \forall t \in [0, t_B]$.

Da un punto di vista cinematico, le infinite riparametrizzazioni possibili di una assegnata traiettoria, descrivono gli infiniti moti possibili su quella traiettoria. In particolare, per un dato moto rettilineo ed uniforme (come nel nostro caso), le riparametrizzazioni lineari conservano il carattere uniforme del moto. Infatti, consideriamo la riparametrizzazione:

$$\theta(t) = \frac{t}{b}, \quad \text{con } b > 0 \text{ dimensionale} \quad (\text{A.25})$$

Segue

$$x(\theta) = bv\theta, \quad (\text{A.26})$$

da cui la velocità

$$\frac{d}{d\theta}x(\theta) = bv = \text{costante} \quad (\text{A.27})$$

Cerchiamo ora di estendere la classe delle riparametrizzazioni considerando anche quelle non regolari. Precisamente, le riparametrizzazioni con una discontinuità di prima specie.

Consideriamo una palla da biliardo che compie un moto rettilineo ed uniforme:

$$x = vt, \quad t \in [0, t_2]$$

All'istante t_2 la biglia entra in una Time Machine modellizzata attraverso la black box di fig. [A.2](#)

Il corrispondente diagramma spaziotemporale è riportato in fig. [A.3](#).

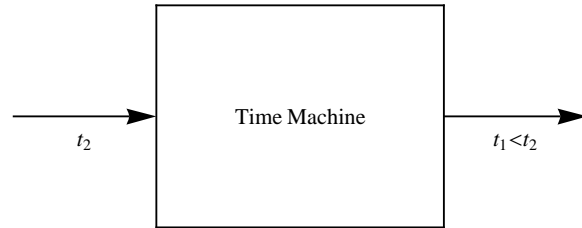


Figura A.2: Una Time Machine può essere schematizzata attraverso un sistema che accetta in input un istante t_2 per poi emettere in output un istante $t_1 < t_2$.

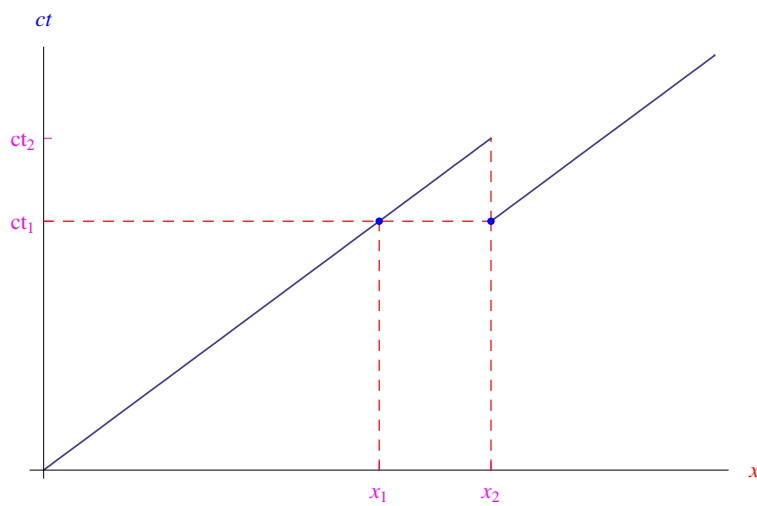


Figura A.3: Linea di universo di una biglia che entra in una TM all'istante t_2 .

Bibliografia

- [1] Carlini A., Frolov V. P., Mensky M. B., Novikov I. D., Soleng H. H.: Time machines: the Principle of Self-Consistency as a consequence of the Principle of Minimal Action, 1996.
- [2] Mensky M. B., Novikov I. D.: Three-Dimensional Billiards with Time Machine, 2000
- [3] Fasano Marmi *Meccanica analitica*, Zanichelli, 1993
- [4] Gantmacher F. R., *Lezioni di Meccanica analitica*, Editori Riuniti - Edizioni Mir, 1990.