L'equazione di Thomas-Fermi. Il metodo di Majorana

Marcello Colozzo

Potrebbe esserci un legame tra il metodo utilizzato da Ettore Majorana per integrare la celebre equazione di Thomas-Fermi, e la nozione di rappresentazione parametrica di una curva piana. Come è noto, tale equazione appartiene alla classe delle equazioni differenziali del secondo ordine , ove non compare la derivata prima. Precisamente:

$$y'' = f(x, y) \tag{1}$$

In particolare, se

$$f(x, y) = \frac{y^{3/2}}{\sqrt{x}}$$

si ottiene la Thomas-Fermi. Consideriamo, comunque, il caso generale. Se $\gamma : y = y(x)$ è una curva integrale della (1), possiamo passare a una qualche rappresentazione parametrica, scrivendo:

$$x = x(t), \; y = y(t), \quad t \in X \subseteq \mathbb{R}$$

Abbiamo quindi la seguente funzione vettoriale (ovviamente incognita):

$$\mathbf{x}(t) = x(t)\,\mathbf{e}_1 + y(t)\,\mathbf{e}_2 \tag{2}$$

Se la funzione $\mathbf{x}(t)$ è iniettiva, si stabilisce una corrispondenza biunivoca tra gli elementi della base X e i punti di γ. L'iniettività implica l'invertibilità di $\mathbf{x}(t)$:

$$t = t(\mathbf{x}) \equiv t(x, y), \quad \forall (x, y) \in \mathbf{x}(X) = \gamma \tag{3}$$

giacché la curva integrale γ è l'immagine di X attraverso l'applicazione $\mathbf{x}(t)$, come illustrato in fig. 1.

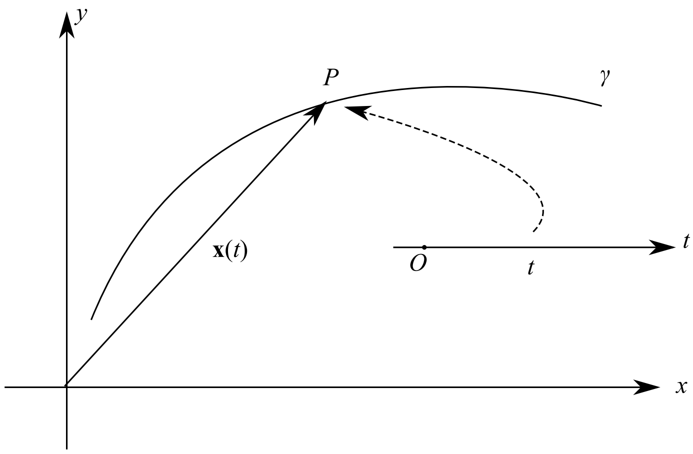

Figura 1: Una curva integrale dell'equazione differenziale (1).

Per quanto abbiamo visto nei paragrafi precedenti, una curva ammette infinite rappresentazioni parametriche (definite a meno di una sostituzione di parametro). Ciò implica l'arbitrarietà della funzione reale delle variabili reali x, y

$$t = t(x, y) \tag{4}$$

Nel tentativo di abbassare di grado l'equazione differenziale (1), definiamo una nuova funzione:

$$u = u\left(y, y'\right) \tag{5}$$

e quindi, la funzione composta:

$$u\left(t\right) = u\left[y\left(t\right), y'\left(t\right)\right] \tag{6}$$

Derivando rispetto a t

$$\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial u}{\partial y'}\dot{y}',$$

ove abbiamo utilizzato la notazione puntata per denotare la derivazione rispetto a t. D'altra parte

$$\dot{y} = \dot{x}y', \quad \dot{y}' = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}\frac{dx}{dt} = \dot{x}y'',$$

per cui

$$\dot{u} = \dot{x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}y' + \frac{\partial u}{\partial y'}y''\right)$$

Tenendo conto della (1)

$$\dot{u} = \dot{x}\left[\frac{\partial u}{\partial y}y' + \frac{\partial u}{\partial y'}f\left(x, y\right)\right] \tag{7}$$

A questo punto, si sceglie un'opportuna funzione $t = t\left(x, y\right)$ (in forza della sua arbitrarietà), in modo da esprimere la derivata $\dot{x}$ attraverso u e t, cosicchè in generale otteniamo:

$$\dot{u} = F\left(t, u\right),$$

che è un'equazione differenziale del primo ordine nella funzione incognita $u\left(t\right)$. Abbiamo così abbassato l'ordine dell'equazione di partenza, a patto di riuscire poi ad esprimere $y\left(x\right)$ attraverso la soluzione $u\left(t\right)$.