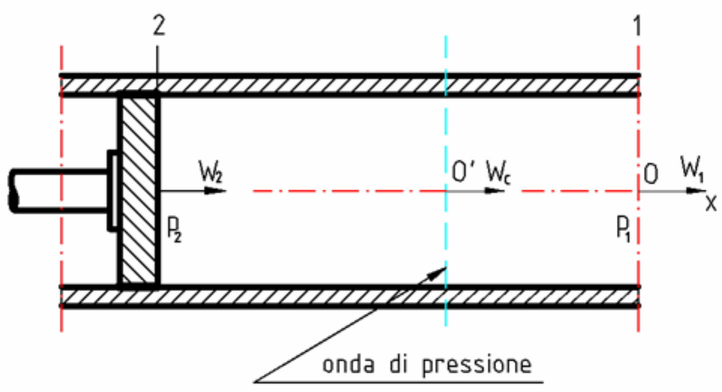
Termotecnica

Ing. Giorgio Bertucelli



All'interno del cilindro (fig.) si trova un gas alla pressione p_1 e che si muove con velocità W_1. Se il pistone si sposta verso destra alla velocità $W_2 > W_1$ nascerà una sovrappresione $p_2 - p_1$ e conseguentemente un'onda di pressione ovvero un fronte mobile di divisione tra la zona a monte con pressioneo p_2 e quella a valle con pressione p_1. Il fronte d'onda si muove con velocità W_c. Spostiamo l'origine O dell'ascissa x in O'. A valle di O' la velocità è $(W_1 - W_c)$ e a monte è $(-W_c + W_2) = -(W_c - W_2)$. Si ha dunque

$$\rho_1 (W_1 - W_c) S = -\rho_2 (W_c - W_2) S \tag{1}$$

Semplifichiamo il problema assumendo $W_1 = 0$. Scriveremo allora:

$$-\rho_1 W_c S = -\rho_2 (W_c - W_2) S \tag{2}$$

che per l'equilibrio delle forze, conseguenza della quantità di moto nell'unità di tempo, diventa:

$$(p_1 - p_2) S = m [-(W_c - W_2) - (-W_c)] \tag{3}$$

dove m è la massa:

$$m = -\rho_1 W_c S$$

Segue

$$(p_1 - p_2) S = \rho_1 W_c S [(W_c - W_2) - W_c] \tag{4}$$

Dal corso di Termodinamica ricordiamo (con noto significato dei simboli):

$$\text{entalpia=energia interna + lavoro} \implies \Delta i = \Delta u + \Delta (pv)$$

Segue dalle equazioni della lezione precedente

$$dq = di + d\left(\frac{W^2}{2}\right) \implies \Delta\left(\frac{W^2}{2}\right) = -\Delta i \implies \Delta\left(\frac{W^2}{2}\right) = \Delta u - \Delta (pv) \tag{5}$$

Ma

$$\Delta u = C_v dT, \quad C_p - C_v = R, \quad \frac{C_p}{C_v} = K \implies \frac{C_p - C_v}{C_v} = K - 1 \implies C_v = \frac{R}{K-1}$$

Quindi la (5) si scrive:

$$\Delta\left(\frac{W^2}{2}\right) = -\frac{R}{K-1}\Delta T - \Delta (pv) = -\frac{\Delta (pv)}{K-1} - \Delta (pv) = -\frac{K}{K-1}\Delta\left(\frac{p}{\rho}\right) \tag{6}$$

Scriveremo allora

$$\frac{W^2}{2}+\frac{K}{K-1}\frac{p}{\rho}=\text{cost}\Longrightarrow WdW+\frac{K}{K-1}\frac{dp}{\rho}-\frac{K}{K-1}\frac{d\rho}{\rho^2}p=0 \tag{7}$$

Sostituendo nella (6) i valori delle sezioni 1 e 2 del cilindro:

$$\frac{(W_c-W_2)^2-W_c^2}{2}=\frac{K}{K-1}\left(\frac{p_1}{\rho_1}-\frac{p_2}{\rho_2}\right) \tag{8}$$

Dalla (1) con $W_1=0$

$$\rho_1 W_c S=-\rho_2\left(W_c-W_2\right)S\Longrightarrow\rho_2=\frac{\rho_1 W_c}{W_c-W_2} \tag{9}$$

Dalla (4) scriviamo:

$$(p_1-p_2)=\rho_1 W_c W_2\Longrightarrow W_2=\frac{p_1-p_2}{\rho_1 W_c} \tag{10}$$

che sostituiti nella (8) danno

$$\frac{(p_1-p_2)^2+2W_c^2\rho_1\left(p_1-p_2\right)}{\rho_1^2 W_c^2}=\frac{2K}{K-1}W_c^2\rho_1-p_2\frac{2L}{K-1}\Longrightarrow\frac{Kp_1}{\rho_1}\left(\frac{K-1}{2K}+\frac{p_2}{p_1}\frac{K+1}{K}\right)=W_c^2$$

da cui

$$W_c=\sqrt{\frac{Kp_1}{\rho_1}\left(\frac{K-1}{2K}+\frac{p_2}{p_1}\frac{K+1}{K}\right)} \tag{11}$$

Se però la sovrappressione è piccola tale che $\frac{p_2}{p_1}\sim 1$ si avrà

$$W_c=\sqrt{\frac{Kp_1}{\rho_1}} \tag{12}$$

che è la velocità del suono in un mezzo in cui K, p_1, ρ_1 hanno valori assegnati.