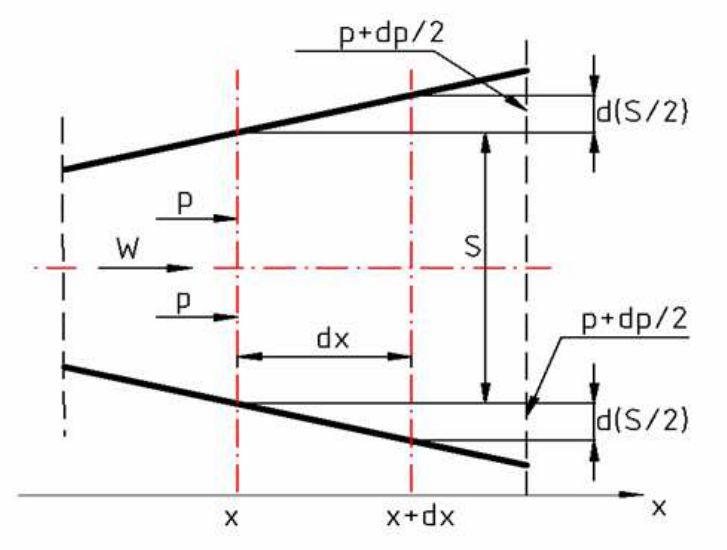
Termotecnica

ing. Giorgio Bertucelli

1 Moto in un condotto a sezione variabile

1.1 Fluido comprimibile con trasmissione di calore e attrito esterno



Scriviamo l'equazione di continuità:

$$\rho SW = \text{cost} \Longrightarrow d(\rho SW) = 0 \tag{1}$$

Equazione di stato dei gas perfetti:

$$pV = RT \Longrightarrow \frac{p}{\rho T} = R \Longrightarrow d\left(\frac{p}{\rho T}\right) = 0 \tag{2}$$

Equazione dell'energia

$$dq = di + d\left(\frac{W^2}{2}\right) \Longrightarrow dq = C_p dT + W dW \tag{3}$$

dove dq è il calore ceduto al fluido e i è l'entalpia. Scriviamo ora l'equazione delle forze (o della quantità di moto). A tale scopo consideriamo l'elemento di volume Sdx la cui massa è $dm = \rho Sdx$, in equilibrio sotto le forze di pressione, di massa e d'attrito. La reazione di attrito per unità di massa è F che compie un lavoro $dL = Fdx$ passando da x a $x + dx$. Segue

$$\begin{aligned} pS - (p+dp)(S+dS) + 2\left(p + \frac{dp}{2}\right)\frac{dS}{2} - \rho Sdx F &= \rho Sdx \frac{dW}{dt} \\ &= \rho Sdx \frac{dW}{dx}\frac{dx}{dt} \\ &= \rho Sdx \frac{dW}{dx} dW \end{aligned}$$

Semplificando e trascurando gli infinitesimi di ordine superiore al primo, scriveremo:

$$-Sdp - \rho SdL = \rho Sdx \frac{dW}{dx} W \Longrightarrow -dp - \rho dL = \rho W dW \tag{4}$$

Le quattro relazioni ottenute sono gli strumenti per lo studio del moto. Va ricordato da *Fisica Tecnica – Moto dei fluidi sotto forti differenze di pressioni* che la velocità del suono nell'aria è data dalla relazione

$$W_{Ac} = \sqrt{2\frac{K}{K+1}p_1 v_1} \tag{5}$$

dove $K = C_p/C_v$ è l'esponente di trasformazione adiabatica, mentre p_1 e v_1 sono rispettivamente la pressione e il volume specifico del fluido nella sezione iniziale del flusso. Segue

$$p_1 v_1^K = p_c v_c^K \tag{6}$$

dove p_c e v_c sono rispettivamente la pressione e il volume specifico critici nella sezione minima della vena.

$$p_1 v_1 = p_c v_c \left(\frac{v_c}{v_1}\right)^{K-1} = p_c v_c \left(\frac{p_1}{p_c}\right)^{\frac{K-1}{K}} \tag{7}$$

Ricordando che

$$\frac{p_c}{p_1} = \left(\frac{2}{K+1}\right)^{\frac{K}{K-1}}, \qquad \frac{p_1}{p_c} = \left(\frac{2}{K+1}\right)^{-\frac{K}{K-1}} \tag{8}$$

scriveremo

$$p_1 v_1 = p_c v_c \left[\left(\frac{2}{K+1}\right)^{-\frac{K}{K-1}}\right]^{\frac{K-1}{K}} = p_c v_c \left(\frac{2}{K+1}\right)^{-1} = p_c v_c \frac{K+1}{2}$$

e dunque la (5) diventa

$$W_{Ac} = \sqrt{K p_c v_c} = \sqrt{KRT} \tag{9}$$

Il rapporto W/W_{Ac} è il *numero di Mach* M

$$M^2 \stackrel{def}{=} N = \frac{W^2}{W_{Ac}^2} = \frac{W^2}{KRT}$$

Inoltre si ha:

$$\frac{C_v}{C_p} = \frac{1}{K} \Longrightarrow \frac{C_v - C_p}{C_p} = \frac{1-K}{K} \Longrightarrow \frac{C_p - C_v}{C_p} = \frac{K-1}{K}$$

Ma sappiamo che $C_p - C_v = R$ quindi

$$C_p = \frac{RK}{K-1} \tag{10}$$

Ciò premesso, possiamo scrivere:

a) per l'equazione di continuità: $\rho W S = \text{cost} \Longrightarrow \ln\rho + \ln W + \ln S = \text{cost}$ e quindi

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dW}{W} + \frac{dS}{S} = 0 \tag{11}$$

b) per l'equazione dell'energia: $dq = C_p dT + W dW$ da cui

$$\frac{dq}{C_p T} = \frac{dT}{T} + \frac{W dW}{C_p T} \Longrightarrow \frac{dq}{C_p T} = \frac{dT}{T} + \frac{K-1}{K}\frac{W dW}{RT} \tag{12}$$

Ne segue

$$\frac{dq}{C_p T} = \frac{dT}{T} + (K-1)\,N\frac{dW}{RT} \tag{13}$$

c) per l'equazione delle forze:

$$-dp - \rho dL = \rho W dW \Longrightarrow -\frac{dp}{p} - \frac{\rho dL}{p} = \frac{\rho W dW}{p} = \frac{W dW}{pv}$$

Dopo qualche passaggio:

$$-\frac{dp}{p} - \frac{\rho dL}{p} = KN\frac{dW}{W} \tag{14}$$

Ricordando il rapporto N, possiamo scrivere

$$N\,(KR)\,T = W^2 \Longrightarrow \ln N + \ln\,(KR) + \ln T = \ln W^2$$

Differenziando

$$\frac{dN}{N} + \frac{dT}{T} = 2\frac{dW}{W} \Longrightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{dN}{N} + \frac{dT}{T}\right) = \frac{dW}{W} \tag{15}$$

Dall'equazione dei gas perfetti

$$p = \rho RT \Longrightarrow \ln p = \ln \rho + \ln R + \ln T$$

Differenziando

$$\frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T} \Longrightarrow \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dp}{p} + \frac{dT}{T}$$

che sostituita nella (11):

$$\frac{dp}{p} - \frac{dT}{T} + \frac{dW}{W} + \frac{dS}{S} = 0 \Longrightarrow \frac{dS}{S} = -\frac{dp}{p} + \frac{dT}{T} - \frac{dW}{W} \Longrightarrow \frac{dS}{S} = -\frac{dp}{p} + \frac{dT}{T} - \frac{1}{2}\frac{dN}{N} - \frac{1}{2}\frac{dT}{T}$$

Cioè l'equazione di continuità-stato nelle incognite $\frac{dT}{T}, \frac{dN}{N}, \frac{dp}{p}$

$$\frac{dS}{S} = \frac{1}{2}\frac{dT}{T} - \frac{1}{2}\frac{dN}{N} - \frac{dp}{p} \tag{16}$$

Sostituiamo la (15) nella (12), otteniamo l'equazione dell'energia nelle incognite $\frac{dT}{T}, \frac{dN}{N}$:

$$\frac{dq}{C_p T} = \frac{dT}{T}\left[1 + \frac{N\,(K-1)}{2}\right] + \frac{N\,(K-1)}{2}\frac{dN}{N} \tag{17}$$

Ancora, operando la sostituzione della (15) nella (14):

$$-\frac{dp}{p} - \frac{\rho dL}{p} = \frac{KN}{2}\frac{dN}{N} + \frac{KN}{2}\frac{dT}{T} \Longrightarrow -\frac{dp}{p} - \frac{\rho dL}{p/\rho} = \frac{KN}{2}\frac{dN}{N} + \frac{KN}{2}\frac{dT}{T}$$

da cui otteniamo l'equazione delle forze nelle incognite $\frac{dp}{p}, \frac{dT}{T}, \frac{dN}{N}$

$$\frac{dL}{RT} = -\frac{dp}{p} - \frac{KN}{2}\frac{dN}{N} - \frac{KN}{2}\frac{dT}{T} \tag{18}$$

Possiamo allora disporre di un sistema di tre equazioni lineari non omogenee in tre incognite:

$$\begin{cases} \frac{dS}{S} = -\frac{1}{2}\frac{dN}{N} - \frac{dp}{p} + \frac{1}{2}\frac{dT}{T} \\ \frac{dq}{C_p T} = \frac{N(K-1)}{2}\frac{dN}{N} + 0 + \frac{dT}{T}\left[1 + \frac{N(K-1)}{2}\right] \\ \frac{dL}{RT} = -\frac{KN}{2}\frac{dN}{N} - \frac{dp}{p} - \frac{KN}{2}\frac{dT}{T} \end{cases} \tag{19}$$

il cui determinante dei coefficienti deve essere non nullo, affinché il sistema sia compatibile.

$$D = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{N(K-1)}{2} & 0 & 1+\frac{N(K-1)}{2} \\ -\frac{KN}{2} & -1 & -\frac{KN}{2} \end{vmatrix} = \frac{N-1}{2} \tag{20}$$

Le incognite si calcolano con la regola di Cramer

$$\frac{dN}{N} = \frac{D_N}{D}, \quad \frac{dp}{p} = \frac{D_p}{D}, \quad \frac{dT}{T} = \frac{D_T}{D}$$

essendo

$$D_N = \begin{vmatrix} \frac{dS}{S} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{dq}{C_pT} & 0 & 1+\frac{N(K-1)}{2} \\ \frac{dL}{RT} & -1 & -\frac{KN}{2} \end{vmatrix} \tag{21}$$

$$D_p = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{dS}{S} & \frac{1}{2} \\ \frac{N(K-1)}{2} & \frac{dq}{C_pT} & 1+\frac{N(K-1)}{2} \\ -\frac{KN}{2} & \frac{dL}{RT} & -\frac{KN}{2} \end{vmatrix}$$

$$D_p = \begin{vmatrix} \frac{dS}{S} & -1 & \frac{dS}{S} \\ \frac{dq}{C_pT} & 0 & \frac{dq}{C_pT} \\ \frac{dL}{RT} & -1 & \frac{dL}{RT} \end{vmatrix}$$

Sviluppando i singoli determinanti, si perviene

$$\begin{aligned} \frac{dN}{N} &= \frac{2+N(K-1)}{N-1}\frac{dS}{S} - \frac{1+KN}{N-1}\frac{dq}{C_pT} - \frac{2+N(K-1)}{N-1}\frac{dL}{RT} \\ \frac{dp}{p} &= -\frac{KN}{N-1}\frac{dS}{S} + \frac{KN}{N-1}\frac{dq}{C_pT} - \frac{1+N(K-1)}{N-1}\frac{dL}{RT} \\ \frac{dT}{T} &= -\frac{N(K-1)}{N-1}\frac{dS}{S} + \frac{KN-1}{N-1}\frac{dq}{C_pT} + \frac{N(K-1)}{N-1}\frac{dL}{RT} \end{aligned} \tag{22}$$