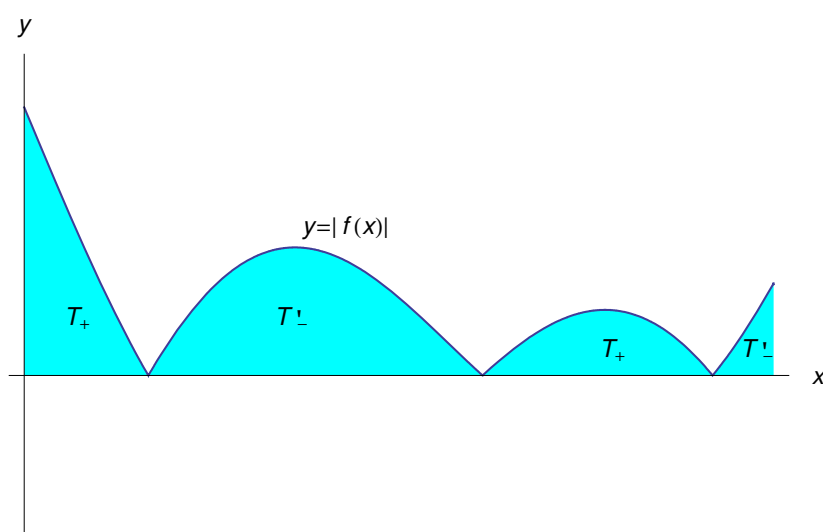




Teoria della misura di Peano–Jordan

Marcello Colozzo



Indice

1	Insiemi notevoli di punti del piano	2
2	Teoria elementare della misura degli insiemi piani. Misurabilità secondo Peano-Jordan	3
3	Area del rettangoloide	6
4	Definizione di integrale	10

1 Insiemi notevoli di punti del piano

Richiamiamo alcune nozioni relative agli insiemi notevoli di punti dello spazio euclideo \mathbb{R}^n nel caso particolare $n = 2$. Assegnati i punti $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ con $a_k < b_k$ ($k = 1, 2$), il rettangolo chiuso di estremi A e B è l'insieme di punti:

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a_1 \leq x \leq b_1, a_2 \leq y \leq b_2\} = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2], \quad (1)$$

Il rettangolo aperto di estremi A e B è:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a_1 < x < b_1, a_2 < y < b_2\} = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \quad (2)$$

In (1)-(2) è univocamente definito il centro:

$$C(x_0, y_0) \mid x_0 = \frac{1}{2}(a_1 + b_1), \quad y_0 = \frac{1}{2}(a_2 + b_2) \quad (3)$$

Comunque prendiamo un rettangolo \mathcal{R} (aperto o chiuso) di estremi $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$, sono univocamente determinati i numeri reali positivi α, β tali che:

$$2\alpha = b_1 - a_1, \quad 2\beta = b_2 - a_2 \quad (4)$$

2α e 2β sono le **dimensioni** di \mathcal{R} , mentre α e β sono le **semidimensioni** di \mathcal{R} . Abbiamo:

$$\begin{cases} a_1 + b_1 = 2x_0 \\ -a_1 + b_1 = 2\alpha \end{cases} \quad (5)$$

Risolvendo il sistema (5) rispetto a (a_1, b_1) , si ottiene:

$$a_1 = x_0 - \alpha, \quad b_1 = x_0 + \alpha \quad (6)$$

Allo stesso modo si perviene al sistema:

$$\begin{cases} a_2 + b_2 = 2y_0 \\ -a_2 + b_2 = 2\beta \end{cases},$$

la cui soluzione rispetto a (a_2, b_2) è:

$$a_2 = y_0 - \beta, \quad b_2 = y_0 + \beta \quad (7)$$

Le (6)-(7) ci consentono di ridefinire il rettangolo chiuso (e aperto) attraverso le dimensioni e le coordinate del centro. Ad esempio, nel caso del rettangolo chiuso:

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x_0 - \alpha \leq x \leq x_0 + \alpha, y_0 - \beta \leq y \leq y_0 + \beta\}$$

Cioè:

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x - x_0| \leq \alpha, |y - y_0| \leq \beta\}$$

Allo stesso modo, il rettangolo aperto di centro (x_0, y_0) e di semidimensioni α e β è:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x - x_0| < \alpha, |y - y_0| < \beta\}$$

La definizione (??) nel caso $n = 2$ è data da:

$$\Omega_R(P_0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq R^2\},$$

mentre il cerchio aperto di centro P_0 e raggio R :

$$\Lambda_R(P_0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < R^2\}$$

2 Teoria elementare della misura degli insiemi piani. Misurabilità secondo Peano-Jordan

Se $u > 0$ denota l'unità di misura dei segmenti, u^2 è l'unità di misura delle aree. In tal modo è possibile determinare la **misura** (o **area**) degli insiemi notevoli del piano quali rettangoli e triangoli. Tale nozione può essere estesa ai poligoni, ovvero agli insiemi del piano dati dall'unione di un numero finito di triangoli (eventualmente disgiunti). Denotando con \mathcal{P} la famiglia¹ dei poligoni del piano cartesiano \mathbb{R}^2 , possiamo definire l'applicazione:

$$\begin{aligned} \mu : \mathcal{P} &\rightarrow \mathbb{R} \\ \mu : \pi &\rightarrow \mu(\pi), \quad \forall \pi \in \mathcal{P} \end{aligned} \quad (8)$$

L'applicazione μ associa al poligono $\pi \in \mathcal{P}$ la sua misura $\mu(\pi) \geq 0$. La funzione μ è additiva:

$$\mu(\pi_1 \cup \pi_2) = \mu(\pi_1) + \mu(\pi_2), \quad \forall \pi_1, \pi_2 \in \mathcal{P} \mid \overset{\circ}{\pi}_1 \cap \overset{\circ}{\pi}_2 = \emptyset \quad (9)$$

Definizione 1 $\pi_1, \pi_2 \in \mathcal{P}$ si dicono **congruenti** se esiste un movimento M del piano che porta π_1 a sovrapporsi a π_2 .

La funzione (8) è **invariante per congruenza**:

$$\pi_1, \pi_2 \in \mathcal{P} \mid \pi_1, \pi_2 \text{ congruenti} \implies \mu(\pi_1) = \mu(\pi_2)$$

È chiaro che \mathcal{P} è una classe particolare di insiemi di punti del piano, nel senso che esistono insiemi più generali non appartenenti a tale classe. Denotiamo con \mathcal{P}^* tale classe più generale. Più precisamente:

$$\mathcal{P}^* = \{X \subset \mathbb{R}^2 \mid X \text{ è limitato}\} \quad (10)$$

Ci poniamo il problema di prolungare l'applicazione (8) alla classe (10). Iniziamo con l'osservare che:

$$X \in \mathcal{P}^* \iff X \text{ è limitato} \implies \exists \Pi \in \mathcal{P} \mid \Pi \supset X$$

Inoltre:

$$\overset{\circ}{X} \neq \emptyset \implies \exists \pi \in \mathcal{P} \mid \pi \subset X$$

Definiamo i seguenti sottoinsiemi di \mathcal{P} :

$$\begin{aligned} \Sigma(X) &= \{\pi \in \mathcal{P} \mid \pi \subset X\} \\ \Gamma(X) &= \{\Pi \in \mathcal{P} \mid \Pi \supset X\}, \end{aligned}$$

a cui corrispondono i seguenti sottoinsiemi di \mathbb{R} :

$$\begin{aligned} A(X) &= \{\mu(\pi) \in [0, +\infty) \mid \pi \in \Sigma(X)\} \\ B(X) &= \{\mu(\Pi) \in [0, +\infty) \mid \Pi \in \Gamma(X)\} \end{aligned}$$

Riesce:

$$\forall \pi \in \Sigma(X), \forall \Pi \in \Gamma(X), \pi \subset \Pi \implies \mu(\pi) \leq \mu(\Pi)$$

Definizione 2 La **misura interna** di X è l'estremo superiore di $A(X)$ e si denota con $\mu_i(X)$:

$$\mu_i(X) = \sup A(X) \quad (11)$$

La **misura esterna** di X è l'estremo superiore di $B(X)$ e si indica con $\mu_e(X)$:

$$\mu_e(X) = \inf B(X) \quad (12)$$

¹Intesa come insieme, cioè *classe*.

Risulta:

$$\overset{\circ}{X} = \emptyset \implies \Sigma(X) = \emptyset \implies \mu_i(X) \stackrel{def}{=} 0$$

Cioè la misura interna di un qualunque insieme privo di punti interni è, per convenzione, nulla. Inoltre:

$$\mu_i(X) \leq \mu_e(X), \quad \forall X \in \mathcal{P}^* \quad (13)$$

Definizione 3 $X \in \mathcal{P}^*$ è **misurabile secondo Peano-Jordan** o semplicemente **misurabile**, se $\mu_i(X) = \mu_e(X)$. In tal caso si pone:

$$\mu(X) = \mu_i(X) = \mu_e(X),$$

dove $\mu(X)$ è la **misura** (o **area**) di X .

Osservazione 4

$$\exists X \in \mathcal{P}^* \mid \mu(X) = 0 \implies \mu_i(X) = 0 \implies \overset{\circ}{X} = \emptyset \quad (14)$$

Cioè un qualunque insieme di misura nulla è necessariamente privo di punti interni. Non è però vero il viceversa:

$$\overset{\circ}{X} = \emptyset \implies \mu_i(X) = 0 \not\Rightarrow \mu(X) = 0 \quad (15)$$

Nella (15) affinché sia $\mu(X) = 0$ è necessario che X sia misurabile, cosicchè:

$$X \in \mathcal{P}^* \mid X \text{ è misurabile e } \overset{\circ}{X} = \emptyset \implies 0 = \mu_i(X) = \mu_e(X) \implies \mu(X) = 0 \quad (16)$$

Per convenzione si assume l'insieme vuoto misurabile e di misura nulla:

$$\mu(\emptyset) = 0$$

Denotiamo con \mathcal{M} la famiglia degli insiemi del piano limitati e misurabili:

$$\mathcal{M} = \{X \in \mathcal{P}^* \mid X \text{ è misurabile}\} \subset \mathcal{P}^*$$

Evidentemente:

$$\mathcal{M} \subset \mathcal{P}^* \implies \forall X \in \mathcal{P}^* - \mathcal{M}, \quad X \text{ non è misurabile}$$

Di seguito un esempio di insieme limitato non misurabile.

Esempio 5 Riprendiamo l'insieme (??) dell'esempio ??. Ridefiniamo:

$$X = \{(x, y) \in \mathcal{R} \mid x, y \in \mathbb{Q}\}, \quad (17)$$

dove $\mathcal{R} = [0, 1] \times [0, 1]$. Ragionando come nell'esempio ??, si ha $\overset{\circ}{X} = \emptyset$, onde $\mu_i(X) = 0$. D'altra parte:

$$\forall \Pi \in \mathcal{P} \mid \Pi \subset \mathcal{R} \implies \mu_e(X) = \inf B(X) = \mu_e(\mathcal{R}) = 1$$

Quindi

$$\mu_i(X) = 0, \quad \mu_e(X) = 1 \implies X \in \mathcal{P}^* - \mathcal{M}$$

Teorema 6 Sia $X \in \mathcal{P}^* \mid \overset{\circ}{X} \neq \emptyset$

$$X \text{ è misurabile} \iff \forall \varepsilon > 0, \exists (\pi_\varepsilon, \Pi_\varepsilon) \in \Sigma(X) \times \Gamma(X) \mid \mu(\Pi_\varepsilon) - \mu(\pi_\varepsilon) < \varepsilon$$

Dimostrazione.

$$X \text{ è misurabile} \stackrel{\text{def. 3}}{\iff} \sup A(X) = \inf B(X) \\ \iff \forall \varepsilon > 0, \exists (\mu_\varepsilon, \nu_\varepsilon) \in A(X) \times B(X) \mid \nu_\varepsilon - \mu_\varepsilon < \varepsilon$$

Ma

$$\mu_\varepsilon \in A(X) \implies \exists \pi_\varepsilon \in \Sigma(X) \mid \mu_\varepsilon = \mu(\pi_\varepsilon) \\ \nu_\varepsilon \in B(X) \implies \exists \Pi_\varepsilon \in \Gamma(X) \mid \nu_\varepsilon = \mu(\Pi_\varepsilon)$$

Quindi

$$X \text{ è misurabile} \iff \forall \varepsilon > 0, \exists (\pi_\varepsilon, \Pi_\varepsilon) \in \Sigma(X) \times \Gamma(X) \mid \mu(\Pi_\varepsilon) - \mu(\pi_\varepsilon) < \varepsilon$$

■

Teorema 7 Sia $X \in \mathcal{P}^* \mid \overset{\circ}{X} = \emptyset$

$$X \text{ è misurabile} \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \Pi_\varepsilon \in \Gamma(X) \mid \mu(\Pi_\varepsilon) < \varepsilon$$

Cioè un insieme limitato e privo di punti interni, è misurabile se e solo se è possibile trovare un poligono contenente X e di area piccola quanto si vuole.

Dimostrazione. Segue immediatamente dalla dimostrazione del teorema precedente ponendo $\sup A(X) = 0$. ■

Il prolungamento della funzione (8) dalla classe \mathcal{P} dei poligoni alla classe \mathcal{M} degli insiemi limitati e misurabili conserva le proprietà della funzione medesima (additività e invarianza per congruenza). In particolare:

$$\forall X_1, X_2 \in \mathcal{M}, \quad X_1 \cup X_2, X_1 \cap X_2, X_1 - X_2 \in \mathcal{M} \quad (18)$$

La proprietà additiva si generalizza nel seguente teorema di cui omettiamo la dimostrazione:

Teorema 8

$$\mu(X_1 \cup X_2) = \mu(X_1) + \mu(X_2) - \mu(X_1 \cap X_2), \quad \forall X_1, X_2 \in \mathcal{M} \quad (19)$$

La (19) esprime la **proprietà subadditiva** della misura. Inoltre:

$$\mu(X_1 - X_2) = \mu(X_1) - \mu(X_2), \quad \forall X_1, X_2 \in \mathcal{M} \quad (20)$$

Fissiamo la nostra attenzione agli insiemi non limitati. Cioè:

$$X \subseteq \mathbb{R}^2 \mid X \notin \mathcal{P}^* \implies X \text{ è non limitato}$$

Definizione 9 L'insieme X non limitato è **misurabile secondo Peano-Jordan** o semplicemente **misurabile**, se:

$$\forall Y \in \mathcal{M}, \quad X \cap Y \text{ è misurabile}$$

e

$$\mu(X) = \sup_{Y \in \mathcal{M}} \mu(X \cap Y) \leq +\infty \quad (21)$$

è la **misura** di X .

$$\mu(X) < +\infty \stackrel{\text{def}}{\implies} X \text{ è di misura finita} \quad (22) \\ \mu(X) = +\infty \stackrel{\text{def}}{\implies} X \text{ è di misura infinita}$$

Per lo studio della misurabilità di un insieme non limitato, è sufficiente riferirsi non a \mathcal{M} ma a una classe particolare di insiemi misurabili. Più precisamente, denotando con \mathcal{S} l'insieme dei rettangoli di centro l'origine e lati paralleli agli assi coordinati, dimostriamo il seguente criterio:

Criterio 10 *Sia X non limitato*

$$X \text{ è misurabile} \iff X \cap \mathcal{R} \text{ è misurabile, } \forall \mathcal{R} \in \mathcal{S} \quad (23)$$

La misura di X è:

$$\mu(X) = \sup_{\mathcal{R} \in \mathcal{S}} \mu(X \cap \mathcal{R}) \quad (24)$$

Dimostrazione. Implicazione diretta.

Per ipotesi X è misurabile, onde $\forall Y \in \mathcal{M}$, $X \cap Y$ è misurabile, da cui la misurabilità di $X \cap \mathcal{R}$, giacchè $\mathcal{S} \subset \mathcal{M}$.

Implicazione inversa.

Per ipotesi $X \cap \mathcal{R}$ è misurabile, $\forall \mathcal{R} \in \mathcal{S}$. Preso ad arbitrio $Y \in \mathcal{M}$, $\forall \mathcal{R} \in \mathcal{S} \mid \mathcal{R} \supset Y \implies X \cap Y = (X \cap \mathcal{R}) \cap Y$. Ma $X \cap \mathcal{R}$ e Y sono misurabili, onde per la (18) segue la misurabilità di $X \cap Y$ e quindi di X (in virtù dell'arbitrarietà di Y). Inoltre:

$$\forall \mathcal{R} \in \mathcal{S}, \quad \sup_{\mathcal{R} \in \mathcal{S}} \mu(X \cap \mathcal{R}) \leq \mu(X)$$

È chiaro che

$$\forall Y \in \mathcal{M} \mid \mathcal{R} \supset Y \implies \mu(X \cap Y) \leq \mu(X \cap \mathcal{R}) \quad (25)$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \sup_{\mathcal{R} \in \mathcal{S}} \mu(X \cap \mathcal{R}) &\leq \mu(X) = \sup_{Y \in \mathcal{M}} \mu(X \cap Y) \leq \sup_{\mathcal{R} \in \mathcal{S}} \mu(X \cap \mathcal{R}) \\ &\implies \mu(X) = \sup_{\mathcal{R} \in \mathcal{S}} \mu(X \cap \mathcal{R}) \end{aligned}$$

■

3 Area del rettangoloide

Assegnato l'intervallo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ consideriamo una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, continua in $[a, b]$ e non negativa. Eseguiamo una decomposizione dell'intervallo $[a, b]$ attraverso $n - 1$ punti presi ad arbitrio ($n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$) e tali che:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

Risulta:

$$[a, b] = \bigcup_{k=0}^{n-1} [x_k, x_{k+1}], \quad (x_k, x_{k+1}) \cap (x_{k'}, x_{k'+1}) = \emptyset, \quad \forall k \neq k' \quad (26)$$

Denotando con $\mathcal{D} = \mathcal{D}(x_0, x_1, \dots, x_n)$ tale decomposizione, vediamo attraverso le (26) che \mathcal{D} è una partizione di $[a, b]$ in n intervalli $[x_k, x_{k+1}]$ ($k = 0, 2, \dots, n - 1$), ciascuno di ampiezza $\delta_k = x_{k+1} - x_k$.

Definizione 11 *Dicesi **ampiezza** o **norma** di \mathcal{D} il numero reale positivo:*

$$\delta = \max_{k \in \mathcal{N}} (x_{k+1} - x_k), \quad (27)$$

essendo $\mathcal{N} \stackrel{def}{=} \{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$.

Senza perdita di generalità supponiamo che f non sia identicamente nulla. Dalla continuità di f nel k -esimo intervallo $[x_k, x_{k+1}]$ segue l'esistenza di massimo e minimo assoluti di f in $[x_k, x_{k+1}]$:

$$m_k = \min_{[x_k, x_{k+1}]} f, \quad M_k = \max_{[x_k, x_{k+1}]} f, \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

Gli estremi assoluti di f in $[x_k, x_{k+1}]$ individuano i rettangoli:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}'_k &= [x_k, x_{k+1}] \times [0, m_k] \\ \mathcal{R}''_k &= [x_k, x_{k+1}] \times [0, M_k], \end{aligned} \quad (28)$$

Risulta:

$$\mu(\mathcal{R}'_k) = m_k(x_{k+1} - x_k), \quad \mu(\mathcal{R}''_k) = M_k(x_{k+1} - x_k)$$

Restano definiti i poligoni:

$$\begin{aligned} \pi(\mathcal{D}) &= \bigcup_{k=0}^{n-1} \mathcal{R}'_k \implies \pi(\mathcal{D}) \subset T \\ \Pi(\mathcal{D}) &= \bigcup_{k=0}^{n-1} \mathcal{R}''_k \implies \Pi(\mathcal{D}) \supset T, \end{aligned} \quad (29)$$

dove $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$ è il **rettangoloide** di base $[a, b]$ relativo alla funzione f . Chiamiamo $\pi(\mathcal{D})$ **plurirettangolo inscritto** a T e $\Pi(\mathcal{D})$ **plurirettangolo circoscritto** a T . Definiamo

$$s_{\mathcal{D}} = \mu(\pi(\mathcal{D})), \quad S_{\mathcal{D}} = \mu(\Pi(\mathcal{D})), \quad (30)$$

onde per la proprietà additiva della misura (cfr. eq. (9)):

$$\begin{aligned} s_{\mathcal{D}} &= \sum_{k=0}^{n-1} \mu(\mathcal{R}'_k) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k(x_{k+1} - x_k) \\ S_{\mathcal{D}} &= \sum_{k=0}^{n-1} \mu(\mathcal{R}''_k) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k(x_{k+1} - x_k) \end{aligned} \quad (31)$$

Risulta:

$$\begin{aligned} \forall \mathcal{D}, \pi(\mathcal{D}) \subseteq \Pi(\mathcal{D}) &\implies s_{\mathcal{D}} \leq S_{\mathcal{D}} \\ \forall \mathcal{D}', \mathcal{D}'', \pi(\mathcal{D}') \subseteq \Pi(\mathcal{D}'') &\implies s_{\mathcal{D}'} \leq S_{\mathcal{D}''} \end{aligned} \quad (32)$$

Teorema 12 *Comunque prendiamo una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, continua in $[a, b]$ e non negativa, il rettangoloide T di base $[a, b]$ relativo a f , è misurabile:*

$$\mu(T) = \sup_{\mathcal{D}} s_{\mathcal{D}} = \inf_{\mathcal{D}} S_{\mathcal{D}} \quad (33)$$

Dimostrazione. Per ipotesi f è continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$, onde per il teorema di Heine-Cantor f è ivi uniformemente continua. Pertanto:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid x', x'' \in [a, b], \quad |x' - x''| < \delta_\varepsilon \implies |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Comunque prendiamo $\varepsilon > 0$, esiste una partizione $\bar{\mathcal{D}} = \bar{\mathcal{D}}(x_0, x_1, \dots, x_n)$ di $[a, b]$ di norma $\bar{\delta} < \delta_\varepsilon$, onde detti \bar{x}_k e \bar{x}'_k rispettivamente i punti di minimo e massimo assoluti di f in $[x_k, x_{k+1}]$, i.e. $f(\bar{x}_k) = m_k$, $f(\bar{x}'_k) = M_k$:

$$\bar{x}_k, \bar{x}'_k \in [x_k, x_{k+1}] \implies |\bar{x}'_k - \bar{x}_k| \leq x_{k+1} - x_k \leq \bar{\delta} < \delta_\varepsilon \implies M_k - m_k < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Ciò implica:

$$S_{\bar{\mathcal{D}}} - s_{\bar{\mathcal{D}}} = \sum_{k=0}^{n-1} (M_k - m_k) (x_{k+1} - x_k) < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) = \varepsilon \stackrel{\text{eq. (30)}}{\implies} \mu(\Pi(\bar{\mathcal{D}})) - \mu(\pi(\bar{\mathcal{D}})) < \varepsilon$$

Per quanto precede, per ogni $\varepsilon > 0$ deve essere $\bar{\delta} < \delta_\varepsilon$, cosicchè $\bar{\delta}$ viene a dipendere da ε : $\Pi(\bar{\mathcal{D}}) = \Pi_\varepsilon$, $\pi(\bar{\mathcal{D}}) = \pi_\varepsilon$. In definitiva:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists (\pi_\varepsilon, \Pi_\varepsilon) \in \Sigma(T) \times \Gamma(T) \mid \mu(\Pi_\varepsilon) - \mu(\pi_\varepsilon) < \varepsilon,$$

da cui la misurabilità di T in virtù del teorema 6. Inoltre:

$$s_{\bar{\mathcal{D}}} \leq \mu(T) \leq S_{\bar{\mathcal{D}}},$$

cosicchè:

$$\left\{ \begin{array}{l} S_{\bar{\mathcal{D}}} - s_{\bar{\mathcal{D}}} < \varepsilon \\ s_{\bar{\mathcal{D}}} \leq \mu(T) \leq S_{\bar{\mathcal{D}}} \end{array} \right\} \implies \forall \varepsilon > 0, \left\{ \begin{array}{l} \mu(T) - s_{\bar{\mathcal{D}}} \leq S_{\bar{\mathcal{D}}} - s_{\bar{\mathcal{D}}} < \varepsilon \implies \mu(T) = \sup_{\mathcal{D}} s_{\mathcal{D}} \\ S_{\bar{\mathcal{D}}} - \mu(T) \leq S_{\bar{\mathcal{D}}} - s_{\bar{\mathcal{D}}} < \varepsilon \implies \mu(T) = \inf_{\mathcal{D}} S_{\mathcal{D}} \end{array} \right.$$

■

Preso ad arbitrio $n \in \mathbb{N}$ e una partizione $\mathcal{D}(x_0, \dots, x_n)$ di $[a, b]$, si ha:

$$s_{\mathcal{D}} \leq \mu(T) \leq S_{\mathcal{D}},$$

per cui $s_{\mathcal{D}}$ è un'approssimazione per difetto di $\mu(T)$, mentre $S_{\mathcal{D}}$ è un'approssimazione per eccesso di $\mu(T)$. Assumere $s_{\mathcal{D}}$ come valore approssimato di $\mu(T)$, equivale ad approssimare - per ogni $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ - il rettangoloide T_k di base $[x_k, x_{k+1}]$ con il rettangolo \mathcal{R}'_k (eq. (28)):

$$\mu(T_k) \simeq m_k (x_{k+1} - x_k)$$

Viceversa, se approssimiamo per eccesso, significa che per ogni $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ approssimiamo il rettangoloide T_k di base $[x_k, x_{k+1}]$ con il rettangolo \mathcal{R}''_k :

$$\mu(T_k) \simeq M_k (x_{k+1} - x_k)$$

Consideriamo ora il rettangolo:

$$\mathcal{R}_k = [x_k, x_{k+1}] \times [0, \eta_k], \quad (34)$$

dove $\eta_k \in [m_k, M_k]$. Evidentemente il plurirettangolo $\bigcup_{k=0}^{n-1} \mathcal{R}_k$ non è inscritto in T , nè circoscritto a T . Sia

$$\sigma_{\mathcal{D}} = \mu\left(\bigcup_{k=0}^{n-1} \mathcal{R}_k\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \mu(\mathcal{R}_k)$$

Cioè:

$$\sigma_{\mathcal{D}} = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) (x_{k+1} - x_k), \quad (35)$$

dove

$$\xi_k \in [x_k, x_{k+1}] \mid f(\xi_k) = \eta_k$$

Definizione 13 Chiamiamo $\sigma_{\mathcal{D}}$ data dalla (35) **somma integrale** (o **somma di Riemann**) relativa alla funzione f e all'intervallo $[a, b]$.

Osservazione 14 Le somme $s_{\mathcal{D}}$ e $S_{\mathcal{D}}$ sono particolari somme integrali:

$$s_{\mathcal{D}} \leq \sigma_{\mathcal{D}} \leq S_{\mathcal{D}} \quad (36)$$

Inoltre

$$\begin{aligned}\sigma_{\mathcal{D}} - \mu(T) &\leq S_{\mathcal{D}} - s_{\mathcal{D}}, \quad \text{se } \sigma_{\mathcal{D}} \geq \mu(T) \\ \mu(T) - \sigma_{\mathcal{D}} &\leq S_{\mathcal{D}} - s_{\mathcal{D}}, \quad \text{se } \sigma_{\mathcal{D}} \leq \mu(T)\end{aligned}$$

Cioè:

$$-(S_{\mathcal{D}} - s_{\mathcal{D}}) \leq \sigma_{\mathcal{D}} - \mu(T) \leq S_{\mathcal{D}} - s_{\mathcal{D}}$$

o, ciò che è lo stesso

$$|\sigma_{\mathcal{D}} - \mu(T)| \leq S_{\mathcal{D}} - s_{\mathcal{D}} \quad (37)$$

Teorema 15

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_{\varepsilon} > 0 \mid \mathcal{D}(x_0, \dots, x_n), \quad \delta < \delta_{\varepsilon} \implies |\sigma_{\mathcal{D}} - \mu(T)| < \varepsilon \quad (38)$$

Dimostrazione. Discende direttamente dalla dimostrazione del teorema 12 e dalla (37). ■

La (38) può essere scritta come:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sigma_{\mathcal{D}} = \mu(T) \quad (39)$$

Osservazione 16 La (39) è una notazione simbolica, giacchè $\sigma_{\mathcal{D}}$ intesa come funzione di δ non è una funzione a un sol valore.

$$\begin{aligned}\sigma_{\mathcal{D}} &: [0, b - a) \rightarrow \mathbb{R} \\ \sigma_{\mathcal{D}} &: \delta \rightarrow \sigma_{\mathcal{D}}(\delta),\end{aligned}$$

dove

$$\sigma_{\mathcal{D}}(\delta) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k)$$

Ma per un assegnato $\delta \in [0, b - a)$ esistono infinite partizioni di $[a, b]$ con norma δ . Se $\mathcal{D}(x_0, \dots, x_n)$ è una di esse, esistono infiniti valori di $\sigma_{\mathcal{D}}(\delta)$ ciascuno per ogni $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$. Ne consegue che $\sigma_{\mathcal{D}}$ è una funzione a infiniti valori.

Conseguenza 17 Dalla (39) segue che l'area $\sigma_{\mathcal{D}}$ del plurirettangolo $\bigcup_{k=0}^{n-1} \mathcal{R}_k$ tende all'area del rettangoloide T , al tendere a zero della norma della decomposizione \mathcal{D} .

Consideriamo ora il caso in cui f è non positiva in $[a, b]$. Il rettangoloide di base $[a, b]$ relativo a f è:

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, \quad f(x) \leq y \leq 0\}$$

La somma $\sigma_{\mathcal{D}}$ relativa a f è:

$$\sigma_{\mathcal{D}} = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k)$$

Denotando con $\sigma'_{\mathcal{D}}$ la somma integrale relativa a $-f$, si ha:

$$\sigma'_{\mathcal{D}} = -\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k)$$

Se T' è il rettangoloide di base $[a, b]$ relativo alla funzione $-f$, si ha che T' è il simmetrico di T rispetto all'asse x . Per quanto precede, T' è misurabile:

$$\mu(T') = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sigma'_{\mathcal{D}} = -\lim_{\delta \rightarrow 0} \sigma_{\mathcal{D}}$$

In virtù della simmetria tra T e T' , si ha:

$$\mu(T) = \mu(T') \implies \lim_{\delta \rightarrow 0} \sigma_{\mathcal{D}} = -\mu(T)$$

Ne consegue che se f è non positiva, il limite:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k)$$

è pari all'area del rettangoloide relativo a f , cambiata di segno.

4 Definizione di integrale

Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua in $[a, b]$. Eseguita una qualunque partizione $\mathcal{D}(x_0, x_1, \dots, x_n)$ di $[a, b]$ di ampiezza δ , comunque prendiamo $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$, otteniamo la somma integrale:

$$\sigma_{\mathcal{D}} = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k)$$

Per quanto precede:

$$f \text{ ha segno costante} \implies \exists \lambda \in \mathbb{R} \mid \lim_{\delta \rightarrow 0} \sigma_{\mathcal{D}} = \lambda,$$

risultando:

$$\lambda = \begin{cases} \mu(T), & \text{se } f \text{ è non negativa} \\ -\mu(T), & \text{se } f \text{ è non positiva} \end{cases}$$

Per una qualunque funzione continua in $[a, b]$ non necessariamente di segno costante, sussiste il teorema:

Teorema 18

$$f \text{ è continua in } [a, b] \implies \exists! \lambda \in \mathbb{R} \mid \lim_{\delta \rightarrow 0} \sigma_{\mathcal{D}} = \lambda$$

Dimostrazione. Per una qualunque funzione f continua in $[a, b]$, definiamo le funzioni:

$$f^+(x) = \frac{f(x) + |f(x)|}{2}, \quad f^-(x) = \frac{f(x) - |f(x)|}{2} \tag{40}$$

che si dicono rispettivamente, la *parte non negativa* e la *parte non positiva* di f . Riesce:

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } f(x) \geq 0 \\ 0, & \text{se } f(x) < 0 \end{cases}, \quad f^-(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } f(x) < 0 \\ 0, & \text{se } f(x) \geq 0 \end{cases}$$

Dalle (40) si ricava facilmente:

$$f(x) = f^+(x) + f^-(x) \tag{41}$$

Poniamo:

$$\begin{aligned} T_+ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, \quad 0 \leq y \leq f^+(x)\} \\ T_- &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, \quad f^-(x) \leq y \leq 0\} \end{aligned} \tag{42}$$

Cioè, T_+ e T_- sono rispettivamente il rettangoloide di base $[a, b]$ relativo a f^+ e a f^- . Comunque eseguiamo una partizione $\mathcal{D}(x_0, x_1, \dots, x_n)$ di $[a, b]$, presi ad arbitrio i punti $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$, si ha:

$$\begin{aligned} \sigma_{\mathcal{D}} &= \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) \\ &\stackrel{\text{eq. (41)}}{=} \sum_{k=0}^{n-1} f^+(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) + \sum_{k=0}^{n-1} f^-(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) \\ &= \sigma_{\mathcal{D}}^+ + \sigma_{\mathcal{D}}^-, \end{aligned}$$

dove:

$$\sigma_{\mathcal{D}}^{\pm} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{n-1} f^{\pm}(\xi_k)(x_{k+1} - x_k), \quad (43)$$

sono le somme integrali relative a f^+ e f^- rispettivamente. Risulta:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sigma_{\mathcal{D}}^+ = \mu(T_+), \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \sigma_{\mathcal{D}}^- = -\mu(T_-),$$

giacchè:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_{\varepsilon} > 0 \mid \mathcal{D}(x_0, \dots, x_n), \quad \delta < \delta_{\varepsilon} \implies \left| \sigma_{\mathcal{D}}^{\pm} \mp \mu(T_{\pm}) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

D'altra parte

$$\begin{aligned} \left| \sigma_{\mathcal{D}} - [\mu(T_+) - \mu(T_-)] \right| &= \left| \sigma_{\mathcal{D}}^+ + \sigma_{\mathcal{D}}^- - \mu(T_+) + \mu(T_-) \right| \\ &= \left| [\sigma_{\mathcal{D}}^+ - \mu(T_+)] + [\sigma_{\mathcal{D}}^- - (-\mu(T_-))] \right| \\ &\leq \underbrace{\left| \sigma_{\mathcal{D}}^+ - \mu(T_+) \right|}_{< \varepsilon/2} + \underbrace{\left| \sigma_{\mathcal{D}}^- - [-\mu(T_-)] \right|}_{< \varepsilon/2} < \varepsilon, \end{aligned}$$

per cui

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sigma_{\mathcal{D}} = \lambda,$$

con $\lambda = \mu(T_+) - \mu(T_-)$. ■

Dal teorema appena dimostrato segue la definizione:

Definizione 19 Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua in $[a, b]$,

$$\int_a^b f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k)$$

si chiama **integrale della funzione f esteso all'intervallo** $[a, b]$.

Per quanto precede, risulta:

$$\int_a^b f(x) dx = \mu(T_+) - \mu(T_-),$$

da cui segue l'interpretazione geometrica dell'integrale definito:

$$f \text{ non negativa in } [a, b] \implies \int_a^b f(x) dx = \mu(T), \text{ i.e. l'area di } T$$

$$f \text{ non positiva in } [a, b] \implies \int_a^b f(x) dx = -\mu(T), \text{ i.e. l'area di } T \text{ cambiata di segno}$$

$$f \text{ non ha segno costante in } [a, b] \implies \int_a^b f(x) dx = \mu(T_+) - \mu(T_-)$$

Dalla (??), tenendo conto che $\mu(T_+) = \int_a^b f^+(x) dx$ e $-\mu(T_-) = \int_a^b f^-(x) dx$, si ha:

$$\int_a^b f(x) dx = \mu(T_+) - \mu(T_-) = \int_a^b f^+(x) dx + \int_a^b f^-(x) dx \quad (44)$$

Denotando con \bar{T} il rettangoloide di base $[a, b]$ relativo a $|f(x)|$:

$$\mu(\bar{T}) = \int_a^b |f(x)| dx$$

È facile persuadersi che $\bar{T} = T_+ \cup T'_-$, $T_+ \cap T'_- = \emptyset$ (cfr. fig. 1), dove T'_- è il rettangoloide simmetrico di T_- rispetto all'asse x . Per la proprietà additiva della misura:

$$\begin{aligned} \mu(\bar{T}) &= \mu(T_+) + \mu(T'_-) \stackrel{\mu(T'_-) = \mu(T_-)}{=} \mu(T_+) - [\mu(T_-)] \\ &= \int_a^b f^+(x) dx - \int_a^b f^-(x) dx \end{aligned}$$

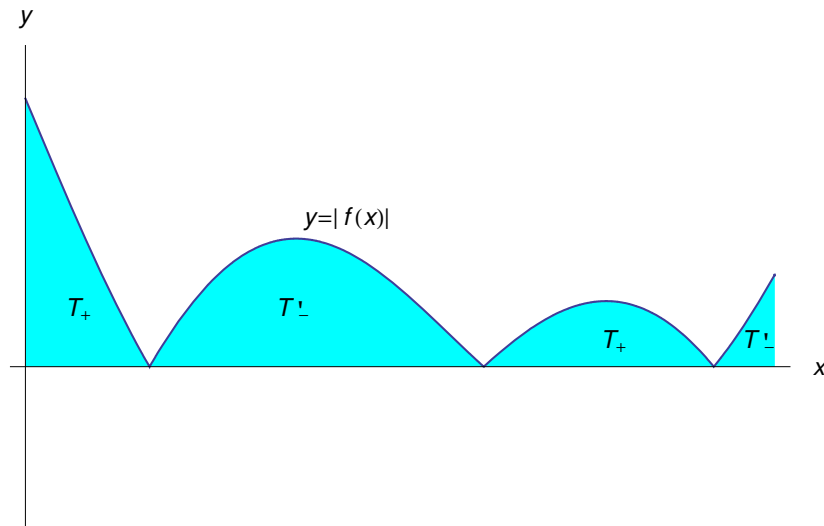


Figura 1: Grafico di $|f(x)|$.

Cioè

$$\int_a^b |f(x)| dx = \int_a^b f^+(x) dx - \int_a^b f^-(x) dx \quad (45)$$

Esempio 20 Assegnata la funzione:

$$f(x) = \sin 4x + \frac{1}{3}x^2 - 2x + 5, \quad (46)$$

consideriamo la sua restrizione all'intervallo chiuso e limitato $[0, 5]$, denotandola con f , per non appesantire la notazione. In fig. 2 è tracciato il grafico di tale restrizione, da cui vediamo che $f(x)$ è positiva in $[0, 5]$.

In fig. 3 evidenziamo il rettangoloide T di base $[0, 5]$ relativo a f .

Eseguiamo una partizione di $[0, 5]$ con $n = 7$, cioè $\mathcal{D} = \mathcal{D}(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)$ con:

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1.30643, \quad x_2 = 2.09191, \quad x_3 = 2.30615, \quad x_4 = 2.45832, \quad x_5 = 2.80006, \quad x_6 = 3.99299, \quad x_7 = 5, \quad (47)$$

Abbiamo, dunque, 7 punti e 6 intervalli $[x_k, x_{k+1}]$, come illustrato in fig. 4

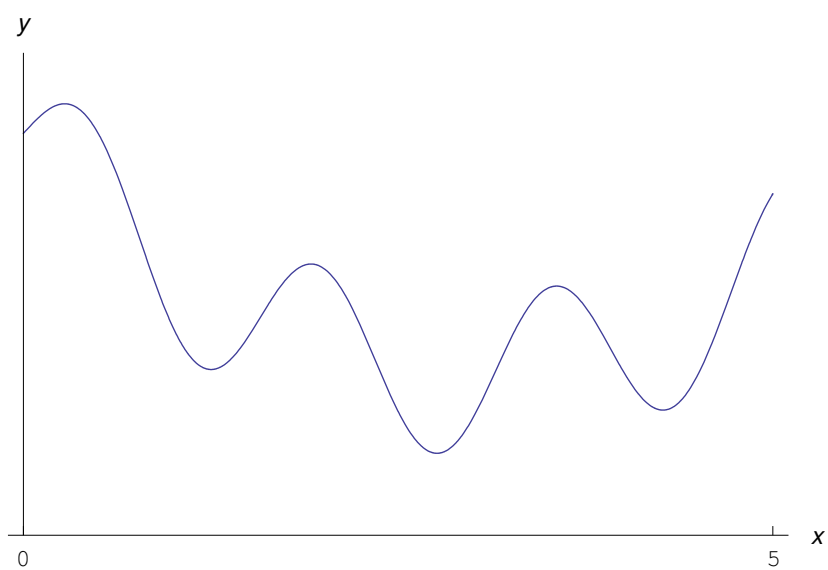


Figura 2: Grafico della restrizione della funzione (46) all'intervallo $[0, 5]$.

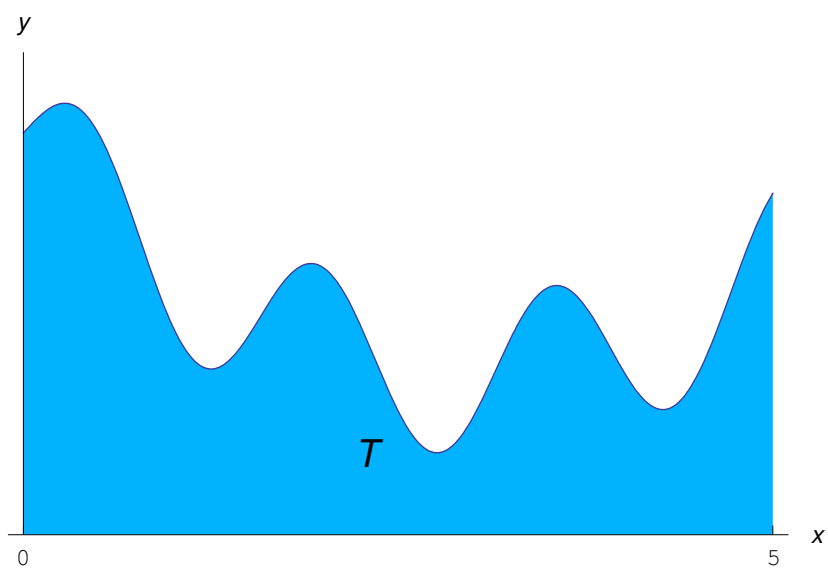
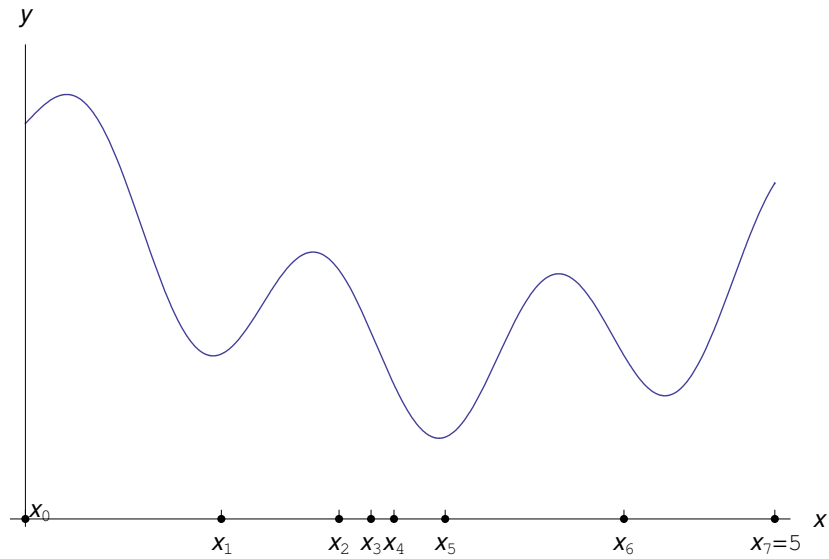


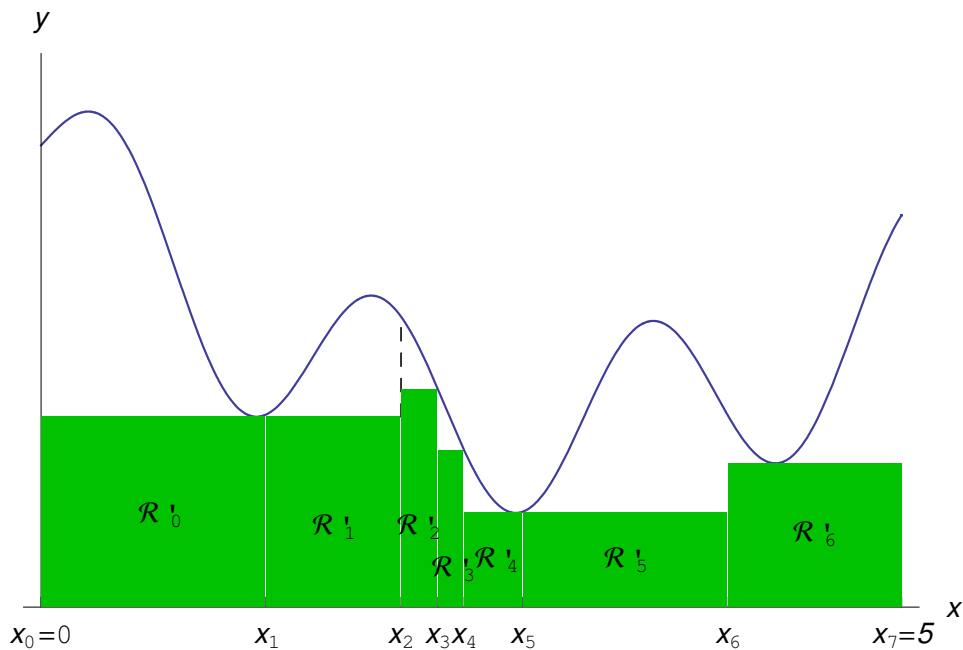
Figura 3: Rettangoloide di base $[0, 5]$ relativo alla funzione (46).

Figura 4: Partizione di $[0, 5]$.

A questo punto possiamo determinare i minimi m_k e quindi i rettangoli \mathcal{R}'_k per $k = 0, 1, \dots, 5$. Utilizzando il procedimento standard di ricerca del minimo di una funzione, otteniamo:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R}'_0 &= [0, x_1] \times [0, m_0], & m_0 &\simeq 2.06188 \\
 \mathcal{R}'_1 &= [x_1, x_2] \times [0, m_1], & m_1 &= m_0 \\
 \mathcal{R}'_2 &= [x_2, x_3] \times [0, m_2], & m_2 &= f(x_3) \\
 \mathcal{R}'_3 &= [x_3, x_4] \times [0, m_3], & m_3 &= f(x_4) \\
 \mathcal{R}'_4 &= [x_4, x_5] \times [0, m_4], & m_4 &\simeq 1.02018 \\
 \mathcal{R}'_5 &= [x_5, x_6] \times [0, m_5], & m_5 &= m_4 \\
 \mathcal{R}'_6 &= [x_6, 5] \times [0, m_6], & m_6 &\simeq 1.55722,
 \end{aligned} \tag{48}$$

come illustrato in fig. 5.

Figura 5: Plurirettangolo inscritto in T .

Determinando le aree dei rettangoli (48) e sommando, otteniamo:

$$s_D = 8.21128 \quad (49)$$

Determiniamo ora l'area del plurirettangolo $\Pi(\mathcal{D})$ circoscritto a T . A tale scopo, costruiamo i rettangoli $\mathcal{R}''_k = [x_k, x_{k+1}] \times [0, M_k]$. Otteniamo:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}''_0 &= [0, x_1] \times [0, M_0], & M_0 &= 5.36642 \\ \mathcal{R}''_1 &= [x_1, x_2] \times [0, M_1], & M_1 &= 3.37373 \\ \mathcal{R}''_2 &= [x_2, x_3] \times [0, M_2], & M_2 &= f(x_2) \\ \mathcal{R}''_3 &= [x_3, x_4] \times [0, M_3], & M_3 &= f(x_3) \\ \mathcal{R}''_4 &= [x_4, x_5] \times [0, M_4], & M_4 &= f(x_4) \\ \mathcal{R}''_5 &= [x_5, x_6] \times [0, M_5], & M_5 &= 3.0993 \\ \mathcal{R}''_6 &= [x_6, 5] \times [0, M_6], & M_6 &= f(5), \end{aligned}$$

come illustrato in fig. 6.

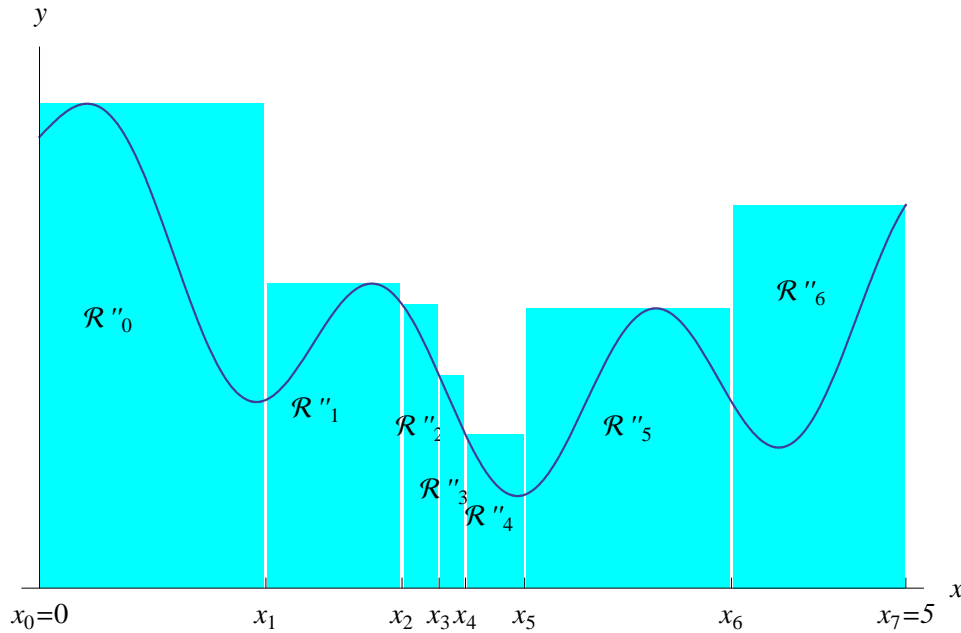


Figura 6: Plurirettangolo circoscritto a T .

Conservando la decomposizione (47) procediamo al calcolo delle somme di Riemann (35) con ξ_k preso ad arbitrio in $[x_k, x_{k+1}]$. Otteniamo il plurirettangolo riportato in fig. 7.

Studiamo il comportamento delle somme integrali all'aumentare di n . Ad esempio, per $n = 30$ e $n = 230$ otteniamo i grafici riportati in figg. 8-9.

Confrontiamo i valori di σ_D al variare di n , con l'area $\mu(T)$:

$$\begin{aligned} \mu(T) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \sigma_D = \int_0^5 \left(\sin 4x + \frac{1}{3}x^2 - 2x + 5 \right) dx \\ &= \frac{509}{36} - \frac{1}{4} \cos 20 \simeq 14.0369 \end{aligned}$$

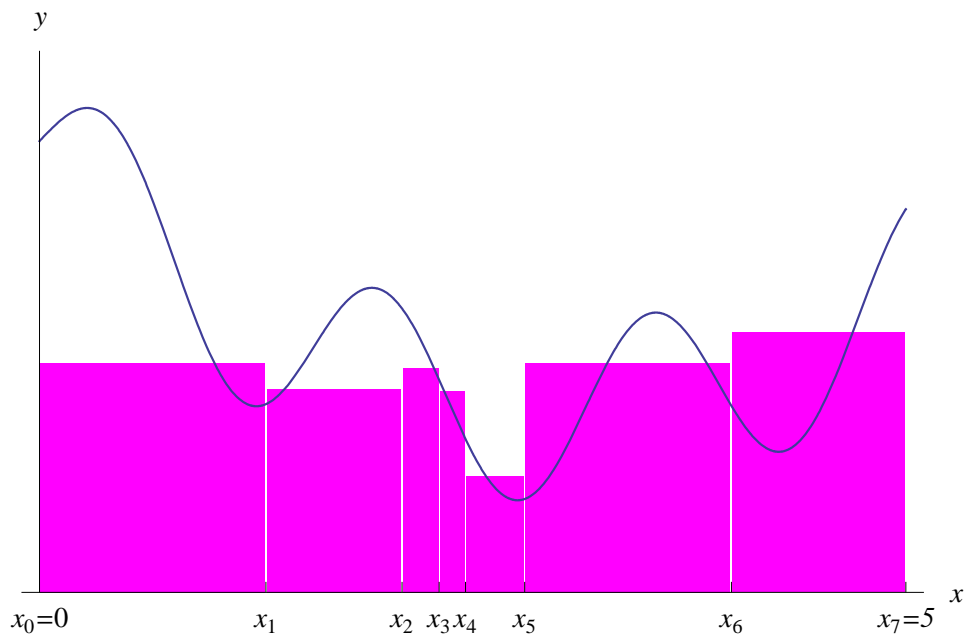


Figura 7: Plurirettangolo $\bigcup_{k=0}^5 \mathcal{R}_k$, dove $\mathcal{R}_k = [x_k, x_{k+1}] \times [0, f(\xi_k)]$.

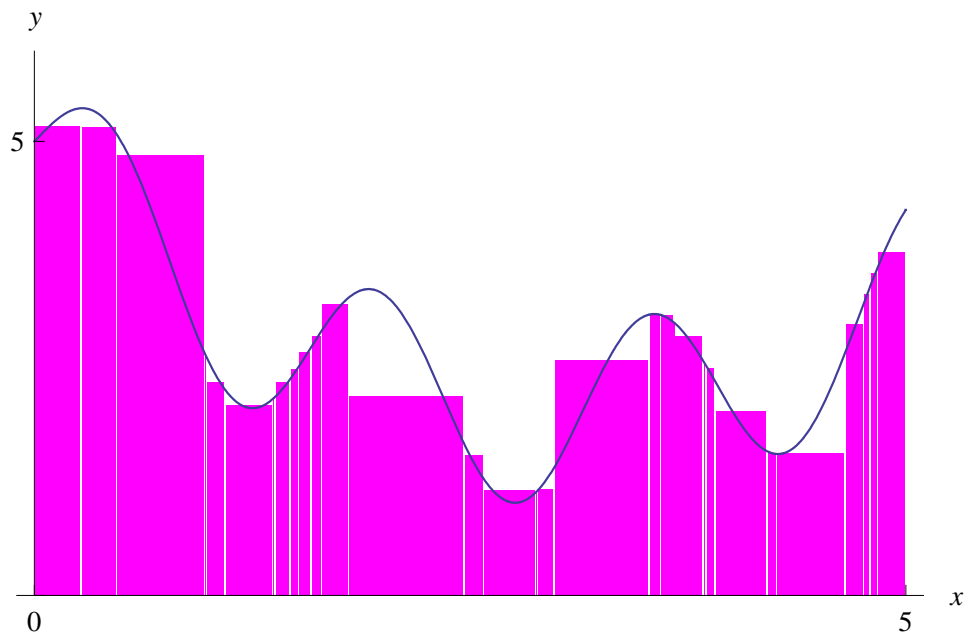


Figura 8: Plurirettangolo $\bigcup_{k=0}^{30} \mathcal{R}_k$, dove $\mathcal{R}_k = [x_k, x_{k+1}] \times [0, f(\xi_k)]$.

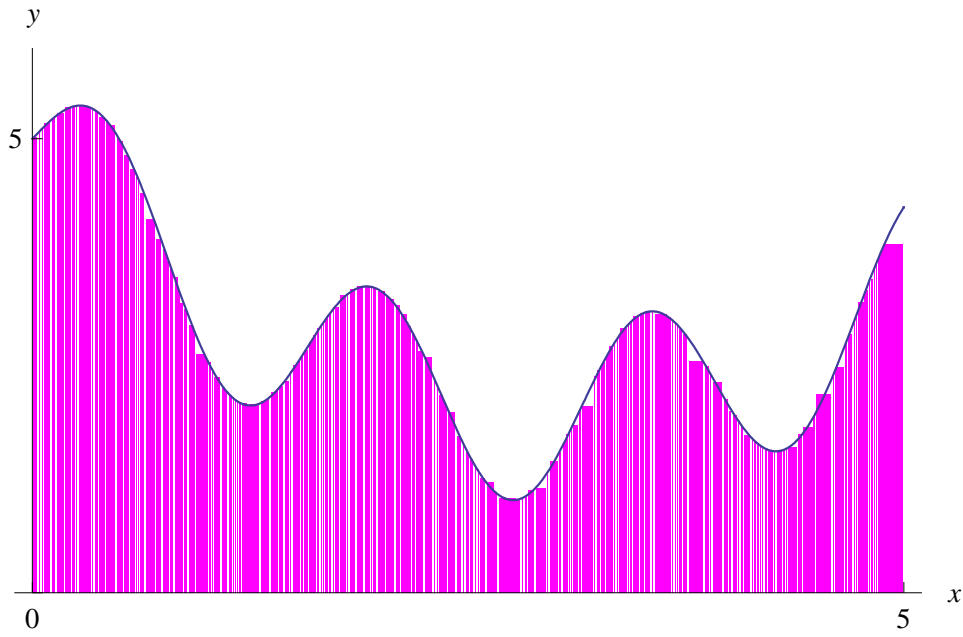


Figura 9: Plurirettangolo $\bigcup_{k=0}^{230} \mathcal{R}_k$, dove $\mathcal{R}_k = [x_k, x_{k+1}] \times [0, f(\xi_k)]$.

Otteniamo:

n	$\sigma_{\mathcal{D}}$
1	15.5980
2	12.4110
3	10.9181
4	10.1182
5	13.2369
6	13.2867
7	14.3345
8	11.3282
9	13.4277
10	13.7131
11	12.1945
12	14.8889
13	15.0414
14	16.1856
15	14.7306
16	14.9807
17	13.8020
18	14.7842
19	12.9874
20	14.8416
21	13.3440
22	13.5341
23	14.0140
24	14.6028
25	13.7566
26	14.1514
27	14.1452

Vediamo, dunque, che al crescere di n , le somme integrali σ_D tendono a $\int_0^5 f(x) dx$, come possiamo vedere anche dal grafico di fig. 10.

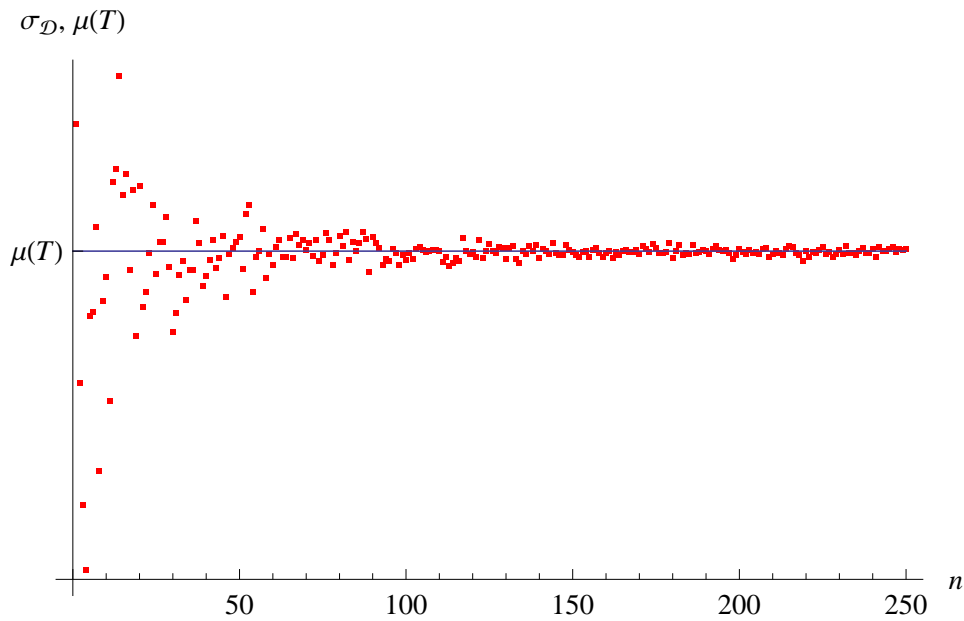


Figura 10: Andamento delle somme di Riemann σ_D in funzione di n . Più precisamente, abbiamo la successione $\{\sigma_D\}_{n \in \mathbb{N}}$, dal cui andamento vediamo che $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_D = \mu(T)$.

Cioè, per $n \rightarrow +\infty$ ($\implies \delta \rightarrow 0$), l'area del plurirettangolo $\bigcup_{k=0}^{n-1} \mathcal{R}_k$ tende all'area del rettangoloide T , in accordo alla conclusione 17.