Teorema di unicità del limite

Marcello Colozzo – http://www.extrabyte.info

Teorema 1 ***Teorema di unicità del limite.***
Sia $f : X \to \mathbb{R}$*, con* $x_0 \in \mathcal{D}(X)$ *tale che* $|x_0| \leq +\infty$

$$f \text{ è regolare in } x_0) \Longrightarrow \exists! l \in [-\infty, +\infty] \mid \lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

Dimostrazione. Senza perdita di generalità, supponiamo che f sia convergente in x_0, punto di accumulazione al finito. Procedendo per assurdo:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l, \; \lim_{x \to x_0} f(x) = l' \neq l$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Longleftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \;\; \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid x \in X, \; 0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l' \Longleftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \;\; \exists \delta'_\varepsilon > 0 \mid x \in X, \; 0 < |x - x_0| < \delta'_\varepsilon \Longrightarrow |f(x) - l'| < \varepsilon$$

Sia $\sigma_\varepsilon = \min\{\delta_\varepsilon, \delta'_\varepsilon\}$, onde:

$$\forall \varepsilon > 0, \;\; \exists \sigma_\varepsilon > 0 \mid x \in X, \; 0 < |x - x_0| < \sigma_\varepsilon \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon, \quad |f(x) - l'| < \varepsilon$$

Cioè:

$$\begin{cases} l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon \\ l' - \varepsilon < f(x) < l' + \varepsilon \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} l - \varepsilon < l' + \varepsilon \\ l' - \varepsilon < l + \varepsilon \end{cases} \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow -2\varepsilon < l - l' < 2\varepsilon \Longleftrightarrow |l - l'| < 2\varepsilon$$

In forza dell'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$:

$$0 < \varepsilon < \frac{1}{2}|l - l'| \Longrightarrow \;\; |l - l'| < 2\varepsilon < |l - l'|,$$

da cui la disuguaglianza assurda $|l - l'| < |l - l'|$, onde la tesi. ■