Il Teorema dei numeri primi

Marcello Colozzo – http://www.extrabyte.info

Denotando con $\pi(x)$ la funzione di distribuzione dei numeri primi, sussiste il seguente teorema:

Teorema 1 *(**Teorema dei Numeri Primi (PNT)**)*
Per $x \to +\infty$, $\pi(x)$ e $u(x) = \frac{x}{\ln x}$ sono infiniti equivalenti. Cioè:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\pi(x)}{u(x)} = 1$$

Per la dimostrazione rimandiamo a [1].
Il comportamento asintotico delle funzioni $\pi(x)$ e $u(x)$ è illustrato in fig. 1.

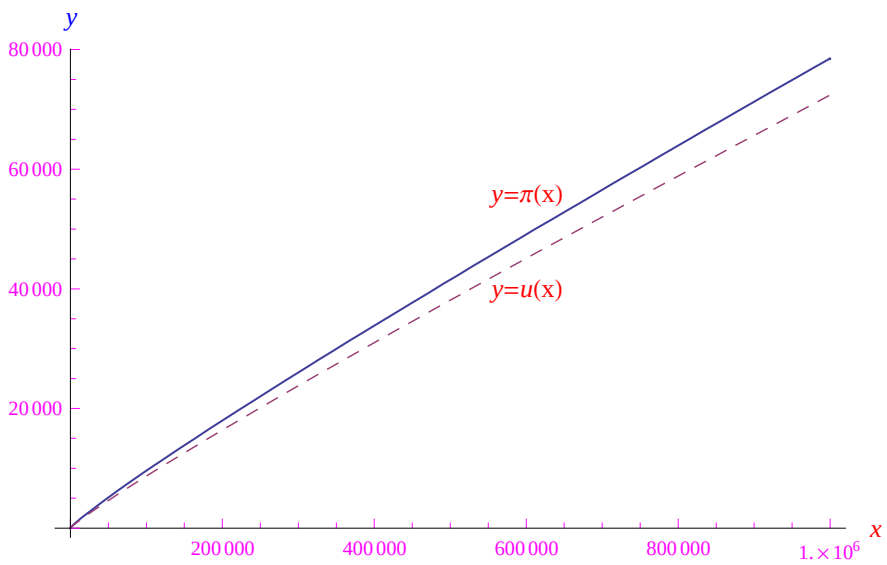

Figura 1: Per $x \to +\infty$, $\pi(x)$ e $u(x) = \frac{x}{\ln x}$ sono infiniti equivalenti.

Il teorema PNT fornisce, dunque, un'approssimazione asintotica e *globale* della funzione di distribuzione $\pi(x)$. Infatti, quest'ultima ha una infinità numerabile di discontinuità di prima specie. Precisamente, La funzione $\pi(x)$ è non negativa ed è continua a tratti, giacchè ha una discontinuità di prima specie in tutti e soli i punti le cui ascisse sono numeri primi. Invero, denotando con $\mathcal{D}$ l'insieme dei punti di discontinuità di $\pi(x)$, si ha:

$$x \in \mathcal{D} \Longleftrightarrow x = p$$

In altri termini, l'insieme delle discontinuità di $\pi(x)$ è il codominio dell'applicazione (**??**). In fig. 2 riportiamo il grafico della restrizione di $\pi(x)$ all'intervallo $X = [0, 6]$, da cui vediamo che:

$$\lim_{x \to 2^-} \pi(x) = 0, \quad \lim_{x \to 2^+} \pi(x) = 1 \Longrightarrow s(2) = +1,$$

dove s denota il salto di discontinuità della funzione. Nei rimanenti punti di discontinuità (in X):

$$\lim_{x \to 3^-} \pi(x) = 1, \quad \lim_{x \to 3^+} \pi(x) = 2 \Longrightarrow s(3) = +1$$
$$\lim_{x \to 5^-} \pi(x) = 1, \quad \lim_{x \to 5^+} \pi(x) = 2 \Longrightarrow s(5) = +1$$

Per ogni numero primo p_n:

$$\lim_{x \to p_n^-} \pi(x) = n - 1, \quad \lim_{x \to p_n^+} \pi(x) = n \Longrightarrow s(p_n) = +1$$

Per $X = [0, 20]$, otteniamo il grafico di fig. 3.

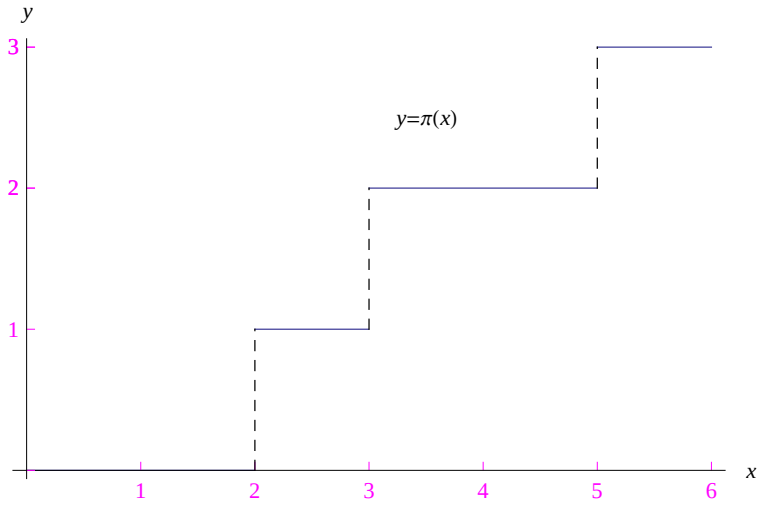

Figura 2: Grafico della funzione $\pi(x)$ per $x \in [0, 6]$.

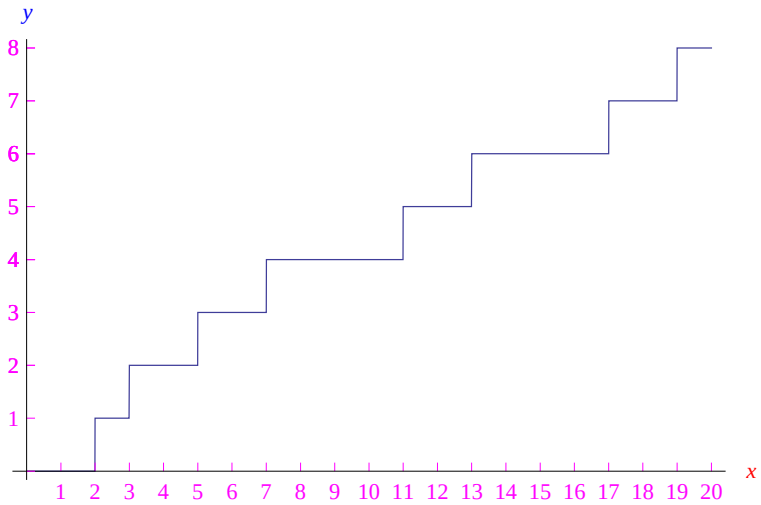

Figura 3: Grafico della funzione $\pi(x)$ per $x \in [0, 20]$.

Per $X = [0, 200]$, otteniamo il grafico di fig. 4 Al crescere indefinito di x, le discontinuità sono meno evidenti, per cui è possibile tentare un'approssimazione "globale" di $\pi(x)$ con una funzione continua in $[0, +\infty)$. Tale approccio è giustificato dal grafico fig. 5

Le discontinuità di $\pi(x)$ e, quindi, la distribuzione dei numeri primi, sono riprodotte dalla distribuzione degli zeri non banali della funzione zeta di Riemann.

Riferimenti bibliografici

[1] Newman D.J.: *Analitic number theory,* Springer, 1998.

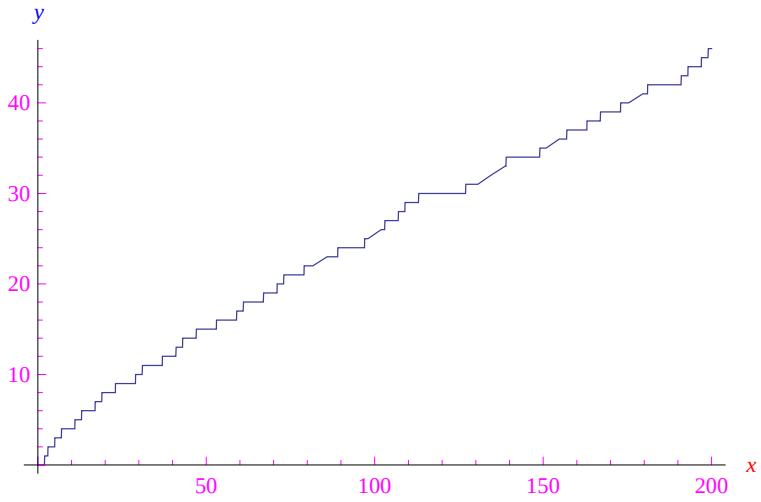

Figura 4: Grafico della funzione $\pi(x)$ per $x \in [0, 200]$.

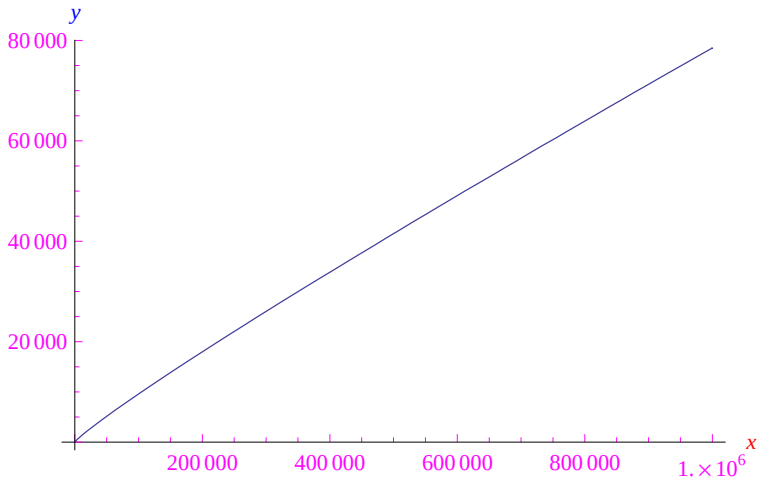

Figura 5: Grafico della funzione $\pi(x)$ per $x \in [0, 10^6]$. Si noti la leggera curvatura del grafico per $x < 200000$, che esprime la non linearità della funzione. Si dimostra che nel limite dei grandi x, il grafico è concavo verso il basso. Ciò si traduce in una diminuzione della densità dei numeri primi.