Appunti di Fisica 1

Marcello Colozzo

1 Teorema del momento della quantità di moto per un sistema di punti materiali

Sia $S = \{P_1, P_2, ..., P_n\}$ un sistema di n punti materiali.

Definizione 1 *Assegnato un punto O si dice* **momento risultante delle forze** *applicate ai singoli punti $\{\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, ..., \mathbf{F}_n\}$, il vettore:*

$$\mathbf{M} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}_k \wedge \mathbf{F}_k \tag{1}$$

Il termine della sommatoria è $\mathbf{r}_k \wedge \mathbf{F}_k = \mathbf{M}_k$ cioè il momento della forza $\mathbf{F}_k$ rispetto a O. Quindi il momento $\mathbf{M}$ è il risultante dei momenti $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, ..., \mathbf{M}_n$.

Definizione 2 *Il* **momento della quantità di moto** *del sistema S rispetto a O, è il vettore*

$$\mathbf{L} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}_k \wedge \mathbf{p}_k \tag{2}$$

dove $\mathbf{p}_k = m_k \mathbf{v}_k$ è la quantità di moto del k-esimo punto.

Il termine della sommatoria è $\mathbf{r}_k \wedge \mathbf{p}_k = \mathbf{L}_k$ cioè il momento della quantità di moto (rispetto a O) del *k-esimo* punto. Quindi il momento $\mathbf{L}$ è il risultante dei momenti della quantità di moto di singolo punto.

Teorema 3

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$$

dove $\mathbf{M}$ è il momento della risultante delle forze esterne applicate al sistema S.

Dimostrazione. Senza perdita di generalità consideriamo $n = 2$ (fig. 1).

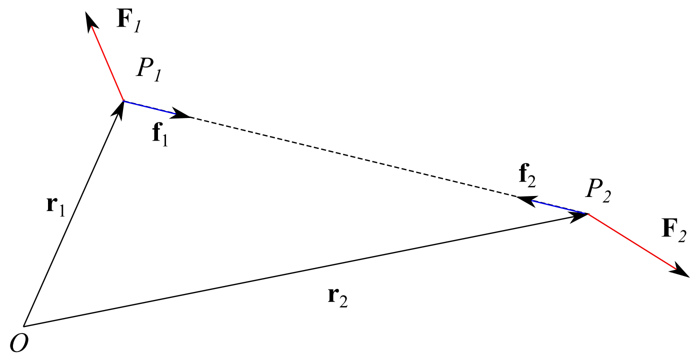

Figura 1: Dimostrazione Teorema 3

Il momento della risultante delle forze esterne è

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_1 \text{ dove } \mathbf{M}_1 = \mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{F}_1, \quad \mathbf{M}_2 = \mathbf{r}_2 \wedge \mathbf{F}_2$$

Come è consuetudine, denotiamo con una lettera minuscola la generica forze interna a S . Precisamente, i due punti materiali interagiscono attraverso le forze $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2 = -\mathbf{f}_1$. Precisato ciò, la risultante delle forze agenti sul punto materiale P_1 è $\mathbf{F}_1 + \mathbf{f}_1$; l'equazione vettoriale (**??**) in tal caso si scrive:

$$\mathbf{r}_1 \wedge (\mathbf{F}_1 + \mathbf{f}_1) = \frac{d\mathbf{L}_1}{dt} \Longrightarrow \mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{f}_1 = \frac{d\mathbf{L}_1}{dt}$$

Allo stesso modo per il punto P_2

$$\mathbf{r}_2 \wedge \mathbf{F}_2 + \mathbf{r}_2 \wedge \mathbf{f}_2 = \frac{d\mathbf{L}_2}{dt}$$

Sommando membro a membro:

$$\underbrace{\mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \wedge \mathbf{F}_2}_{=\mathbf{M}} + \mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{f}_1 + \mathbf{r}_2 \wedge \mathbf{f}_2 = \frac{d}{dt}(\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2)$$

Per esplicitare il secondo termine a primo membro, iniziamo con l'osservare che $\mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{f}_1$ è il momento del vettore $\mathbf{f}_1$ rispetto a O. Se spostiamo tale vettore lungo la sua retta d'azione (congiungente P_1P_2) per applicarlo a P_2, per una proprietà già vista (invarianza del momento rispetto al punto di applicazione lungo la retta d'azione), il momento non cambia. Cioè

$$\mathbf{r}_2 \wedge \mathbf{f}_1 = \mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{f}_1$$

Ma $\mathbf{f}_1 = -\mathbf{f}_2$ e dunque

$$-\mathbf{r}_2 \wedge \mathbf{f}_2 = \mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{f}_1$$

da cui l'asserto. ■

Corollario 4 *Se il punto O si muove con velocità $\mathbf{v}_0$*

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} + \mathbf{v}_0 \wedge \mathbf{p}$$

dove $\mathbf{p}$ è la quantità di moto del sistema che può essere scritta come $\mathbf{p} = mv_c$, dove m è la massa totale e v_c la velocità del centro di massa.

Nel caso particolare in cui O è il centro di massa del sistema, ritroviamo

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$$

anche se il centro di massa non è fisso.