Appunti di Fisica 1

Marcello Colozzo

1 Teorema del lavoro e dell'energia cinetica per un sistema di punti materiali

Ricordiamo che nel caso di un punto materiale di massa m, il teorema del lavoro e dell'energia (§ **??**) cinetica si scrive:

$$\mathcal{L} = T_2 - T_1, \tag{1}$$

dove $\mathcal{L}$ è il lavoro svolto dalla risultante delle forze applicate al punto, e T è l'energia cinetica del punto. Per il lavoro utilizziamo il simbolo calligrafico $\mathcal{L}$ per non confonderci con il modulo L del momento della quantità di moto. Il predetto teorema si estende facilmente ai sistemi di punti materiali. A tale scopo consideriamo il moto di un sistema S di n punti materiali, dalla configurazione $1\left(x_1', y_1', z_1', ..., x_n', y_n', z_n'\right)$ alla configurazione $2\left(x_1'', y_1'', z_1'', ..., x_n'', y_n'', z_n''\right)$. Il punto *k-esimo* si sposterà lungo una traiettoria γ_k di estremi $A_k\left(x_k', y_k', z_k'\right)$, $B_k\left(x_k'', y_k'', z_k''\right)$. Le forze agenti su tale punto P_k sono:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_k &= \text{risultante delle forze esterne (su } P_k\text{)}\\ \mathbf{f}_k &= \text{risultante delle forze interne (esercitate dai rimanenti } n-1 \text{ punti su } P_k\text{)}\end{aligned}$$

Quindi il lavoro svolto sul predetto punto è

$$\mathcal{L}_k = \int_{\gamma_k(A_k,B_k)} \left(\mathbf{F}_k + \mathbf{f}_k\right) \cdot d\mathbf{s}_k \tag{2}$$

La (1) applicata al punto materiale P_k si scrive:

$$\mathcal{L}_k = \frac{1}{2} m_k \left(v_k''\right)^2 - \frac{1}{2} m_k \left(v_k'\right)^2, \tag{3}$$

il teorema deIl lavoro eseguito da tutte le forze (esterne e interne) è:

$$\mathcal{L} = \sum_{k=1}^{n} \mathcal{L}_k \underset{\text{eq. (3)}}{\Longrightarrow} \mathcal{L} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k \left(v_k''\right)^2 - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k \left(v_k'\right)^2$$

L'energia cinetica di S è

$$T = \sum_{k=1}^{n} T_k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k v_k^2,$$

per cui

$$\mathcal{L} = T_2 - T_1,$$

ovvero il teorema del lavoro e dell'energia cinetica per un sistema di punti materiali.

2 Teorema di König

Il *teorema di König* esprime una notevole decomposizione dell'energia cinetica di un sistema di punti materiali. A tale scopo riferiamo il moto di un sistema S di n punti materiali a una terna inerziale $K\left(Oxyz\right)$ e a una terna $K'\left(\Omega\xi\eta\zeta\right)$ che trasla rispetto a S con la velocità $\mathbf{v}_c$ del centro di massa. L'origine Ω coincide con il predetto centro di massa.

Se v_k è la velocità del *k-esimo* punto P_k rispetto a K, per il principio dei moti relativi

$$\mathbf{v}_k = \mathbf{v}_{ck} + \mathbf{v}_c \tag{4}$$

dove $\mathbf{v}_{ck}$ è la velocità di P_k rispetto a K', mentre $\mathbf{v}_c$ è la velocità del moto di trascinamento, i.e. la velocità del centro di massa. Segue

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k v_k^2 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k \left(\mathbf{v}_k \cdot \mathbf{v}_k\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k \left(\mathbf{v}_{ck} + \mathbf{v}_c\right)\left(\mathbf{v}_{ck} + \mathbf{v}_c\right) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k \mathbf{v}_{ck}^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k \mathbf{v}_c^2 + \sum_{k=1}^{n} m_k \mathbf{v}_{ck} \cdot \mathbf{v}_c \end{aligned}$$

Calcoliamo a parte l'ultima sommatoria

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \mathbf{v}_{ck} \cdot \mathbf{v}_c = \mathbf{v}_c \cdot \sum_{k=1}^{n} m_k \mathbf{v}_{ck}$$

Ma $\sum_k m_k \mathbf{v}_{ck}$ è la quantità di moto di S rispetto a K'. Per una nota proprietà del centro di massa:

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \mathbf{v}_{ck} = m\mathbf{v}_{cc}$$

essendo $\mathbf{v}_{cc}$ la velocità del centro di massa rispetto a K'. Ma K' è il sistema di riferimento in cui il centro di massa è in quiete:

$$\mathbf{v}_{cc} = \mathbf{0} \Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} m_k \mathbf{v}_{ck} = \mathbf{0} \Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} m_k \mathbf{v}_{ck} \cdot \mathbf{v}_c = \mathbf{0}$$

onde

$$T = \frac{1}{2} m \mathbf{v}_c^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k v_{ck}^2$$

che è appunto il teorema di König.