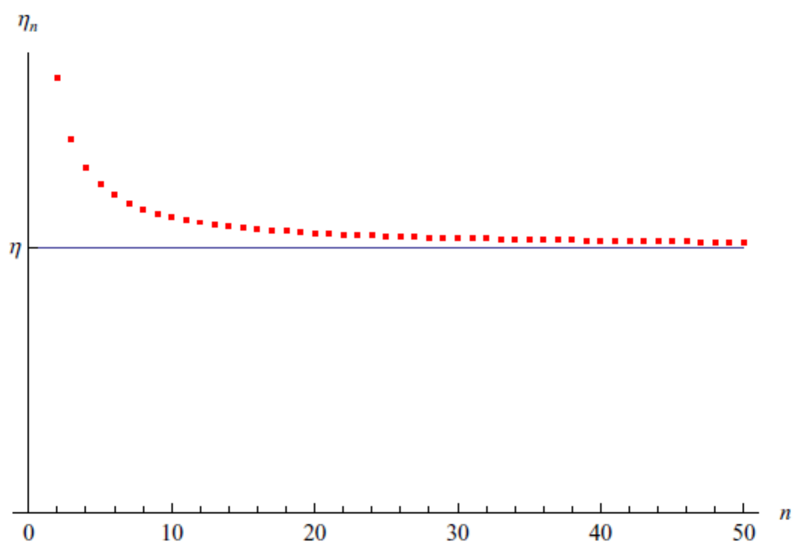
FRONTESPIZIO – http://www.sitoweb.com
International Review of Scientific Synthesis – ISSN 2282-2119
Quaderni di Matematica – 2015

Matematica Open Source – http://www.extrabyte.info

Il Teorema della media – media integrale di una funzione

Marcello Colozzo



Sia $f : X \to \mathbb{R}$ continua in $X \subseteq \mathbb{R}$. Preso ad arbitrio $[a, b] \subset X$, per quanto precede:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\delta \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k),$$

dove δ è l'ampiezza di una qualunque partizione $\mathcal{D}(x_0, x_1, ..., x_n)$ di $[a, b]$, e $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$. Poniamo per definizione:

$$\int_b^a f(x)\,dx \stackrel{def}{=} -\int_a^b f(x)\,dx, \tag{1}$$

onde per $a = b$ dalla (1) si ha:

$$\int_a^a f(x)\,dx = -\int_a^a f(x)\,dx \Longrightarrow \int_a^a f(x)\,dx = 0 \tag{2}$$

La (2) è ben posta, poichè il rettangoloide di base $[a, a]$ è degenere, nel senso che si riduce al segmento verticale di estremi $(a, 0)$, $(a, f(a))$ se $f(a) \neq 0$, al punto $(a, 0)$ se $f(a) = 0$.

Tali considerazioni ci permettono di estendere la definizione **??**. Precisamente:

Definizione 1

$$\int_{x'}^{x''} f(x)\,dx, \qquad \forall x', x'' \in X, \tag{3}$$

*è l'****integrale definito*** *della funzione f* ***esteso all'intervallo orientato di estremi*** *x'* ***e*** *x'', o più semplicemente, è l'****integrale definito*** *della funzione f,* ***da*** *x'* ***a*** *x''. I punti x' e x'' sono gli* ***estremi di integrazione****:*

x' ***estremo inferiore di integrazione***

x'' ***estremo superiore di integrazione***

$\int$ è il ***segno di integrale****, mentre $f(x)\,dx$ è l'****integrando****. Quest'ultimo ricorda l'argomento $f(x_k)(x_{k+1} - x_k)$ delle somme integrali. La funzione f è la* ***funzione integranda****.*

Per quanto riguarda l'interpretazione geometrica della (3), supponendo f non negativa, si ha per $x'' > x'$:

$$\int_{x'}^{x''} f(x)\,dx = \mu(T),$$

essendo T il rettangoloide di base $[x', x'']$ relativo a f. Se $x'' < x'$, dalla (1) segue:

$$\int_{x'}^{x''} f(x)\,dx = -\int_{x''}^{x'} f(x)\,dx = -\mu(T),$$

cioè l'area del rettangoloide T cambiata di segno. Nella (3) la variabile reale x che compare sotto il segno di integrale, si chiama **variabile di integrazione**. È chiaro che l'integrale (3) non dipende da detta variabile, ma esclusivamente dagli estremi di integrazione e dalla funzione integranda. Ne consegue che la variabile di integrazione può essere denotata con un qualunque simbolo a patto di utilizzare un simbolo differente da quello degli estremi di integrazione. Ad esempio:

$$\int_{x'}^{x''} f(t)\,dt, \quad \int_{x'}^{x''} f(\xi)\,d\xi$$

Supponiamo di avere l'integrale definito di f esteso da 0 a ξ. In questo caso non possiamo scrivere:

$$\int_0^{\xi} f(\xi)\,d\xi \qquad \textbf{Errato!}$$

Notazioni corrette sono:

$$\int_0^\xi f(t)\,dt, \quad \int_0^\xi f(\tau)\,d\tau$$

Tutto ciò si esprime dicendo che la variabile di integrazione è una **variabile muta**. Concludiamo, dimostrando la seguente proposizione:

Proposizione 2 *Se C è una costante reale, comunque prendiamo $a, b \in \mathbb{R}$:*

$$\int_a^b C dx = C(b-a) \tag{4}$$

Dimostrazione. La funzione integranda è $f(x) = C$. Distinguiamo i due casi:

1. $a < b$
2. $b < a$

Nel caso 1 eseguiamo una decomposizione $\mathcal{D}(x_0, x_1, ..., x_n)$ di $[a, b]$:

$$\begin{aligned}\int_a^b C dx &= \lim_{\delta\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} C(x_{k+1} - x_k) \\ &= C \lim_{\delta\to 0} \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k)}_{=b-a} \\ &= C(b-a)\end{aligned}$$

Nel caso 2 eseguiamo una decomposizione $\mathcal{D}(x_0, x_1, ..., x_n)$ di $[b, a]$:

$$\begin{aligned}\int_b^a C dx &= \lim_{\delta\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} C(x_{k+1} - x_k) \\ &= C \lim_{\delta\to 0} \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k)}_{=a-b} \\ &= -C(b-a)\end{aligned}$$

Per la (1):

$$\int_a^b C dx = -\int_b^a C dx = C(b-a)$$

■

L'interpretazione geometrica della proposizione appena dimostrata è immediata, giacchè l'integrale $\left|\int_a^b C dx\right|$ è l'area del rettangolo $\mathcal{R}$ di dimensioni $|b-a|$ e $|C|$. Nelle figg. 1-2-3-4 vengono illustrati i vari casi $(a < b,\ a > b,\ C > 0$, etc.$)$.

***

Teorema 3 *Sia $f : X \to \mathbb{R}$ continua e non negativa nell'intervallo $X \subseteq \mathbb{R}$.*

$$a < b \Longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geq \int_{a'}^{b'} f(x)\,dx \geq 0, \quad \forall [a', b'] \subseteq [a, b] \subset X \tag{5}$$

$$a > b \Longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx \leq 0 \tag{6}$$

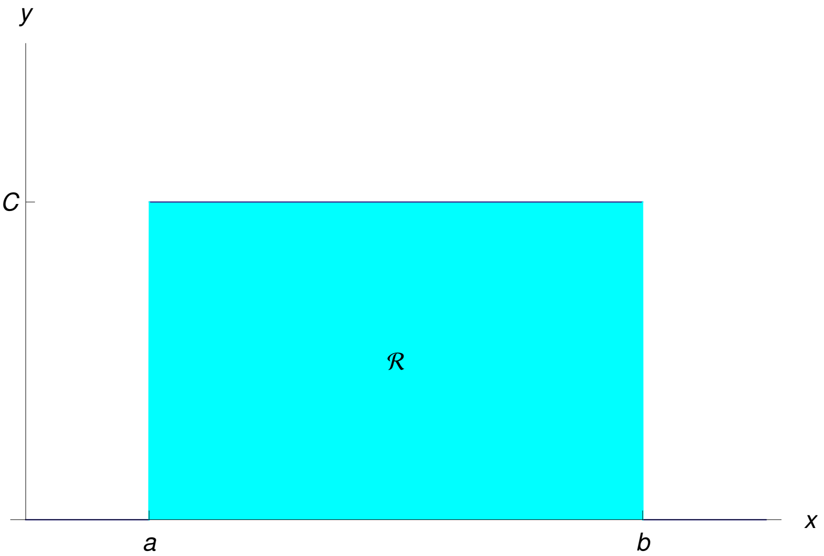


Figura 1: Il rettangoloide di base $[a, b]$ relativo alla funzione $f(x) = C > 0$ è il rettangolo $\mathcal{R}$ di dimensioni $b - a$ e C. La sua area è $\mu(\mathcal{R}) = C(b - a) = \int_a^b C dx > 0$.

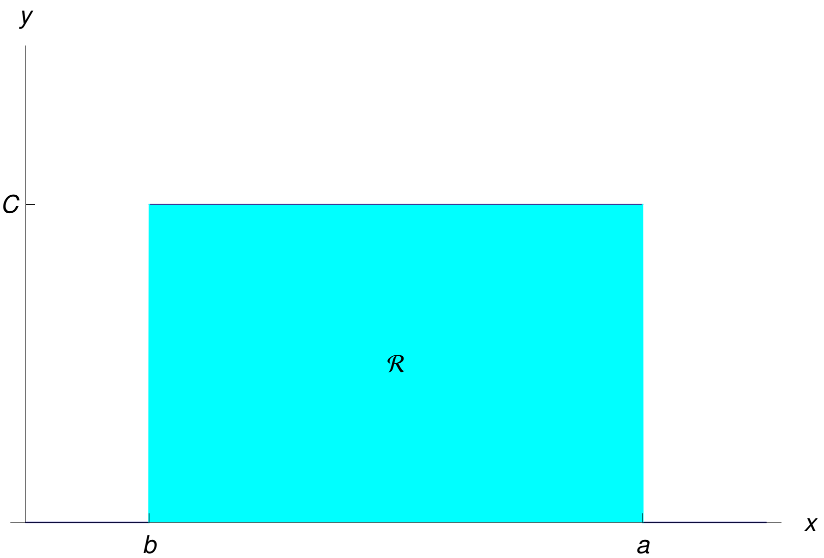


Figura 2: Il rettangoloide di base $[b, a]$ relativo alla funzione $f(x) = C > 0$ è il rettangolo $\mathcal{R}$ di dimensioni C e $a - b$. La sua area è $\mu(\mathcal{R}) = C(a - b) = \int_b^a C dx = -\int_a^b C dx > 0$.

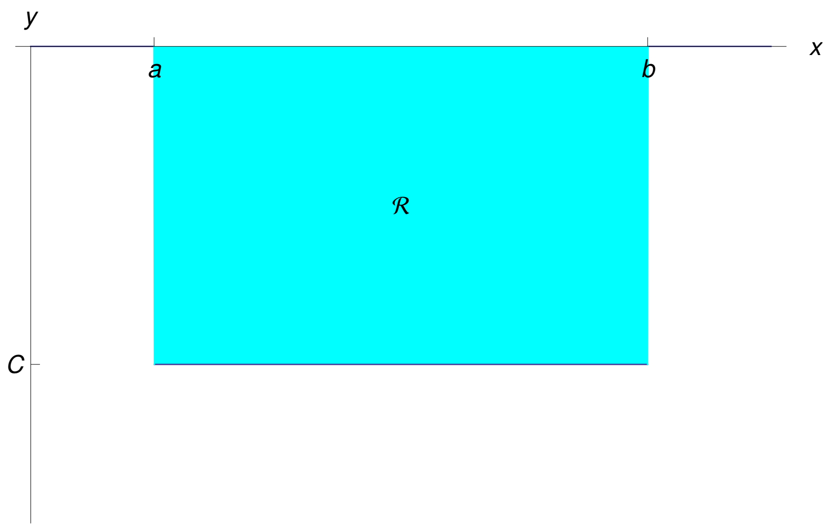


Figura 3: Il rettangoloide di base $[a, b]$ relativo alla funzione $f(x) = C < 0$ è il rettangolo $\mathcal{R}$ di dimensioni $b - a$ $-C$. La sua area è $\mu(\mathcal{R}) = |C|(b - a) = -C(b - a) = -\int_a^b C dx > 0$.

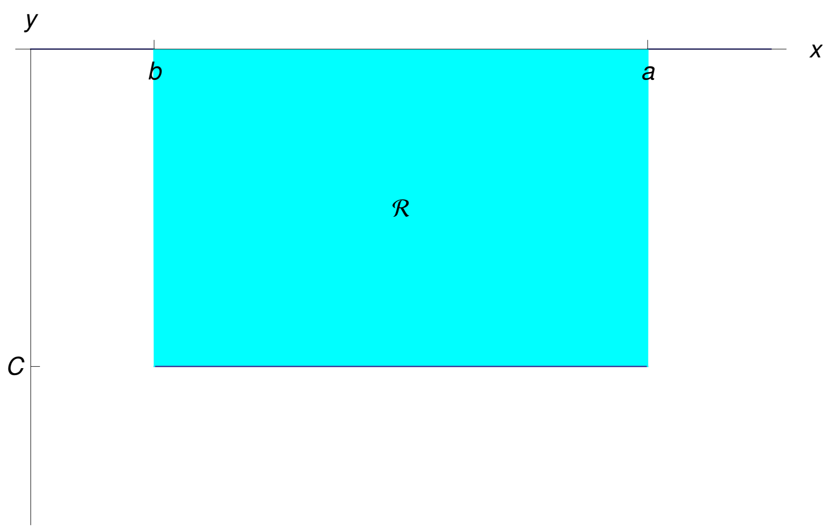


Figura 4: Il rettangoloide di base $[b, a]$ relativo alla funzione $f(x) = C < 0$ è il rettangolo $\mathcal{R}$ di dimensioni $a - b$ e $-C$. La sua area è $\mu(\mathcal{R}) = -(-C)(b - a) = -\int_b^a (-C)\, dx = -\int_a^b C dx > 0$.

Dimostrazione. Iniziamo col dimostrare che $\int_{a'}^{b'} f(x)\,dx \geq 0$ se $a' < b'$. Per una qualunque decomposizione $\mathcal{D}(x_0, x_1, ..., x_n)$ di $[a', b']$ di norma δ, si ha:

$$\int_{a'}^{b'} f(x)\,dx = \lim_{\delta \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) \underset{f(\xi_k)\geq 0}{\geq} 0$$

Inoltre, se T e T' denotano i rettangoloidi relativi a f, di base rispettivamente $[a, b]$ e $[a', b']$, si ha:

$$[a', b'] \subseteq [a, b] \Longrightarrow T' \subseteq T \Longrightarrow \mu(T') \leq \mu(T) \Longrightarrow \int_{a'}^{b'} f(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx$$

La dimostrazione della (6) è immediata:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx,$$

con $\int_b^a f(x)\,dx \geq 0$, giacchè è $b < a$. ■

Teorema 4 *Per una qualunque funzione $f : X \to \mathbb{R}$ continua nell'intervallo $X \subseteq \mathbb{R}$:*

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \left| \int_a^b |f(x)|\,dx \right|, \quad \forall a, b \in X$$

Dimostrazione. Per la dimostrazione ci serviremo delle (??)-(??) che qui riscriviamo:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f^+(x)\,dx + \int_a^b f^-(x)\,dx$$
$$\int_a^b |f(x)|\,dx = \int_a^b f^+(x)\,dx - \int_a^b f^-(x)\,dx,$$

da cui:

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| = \left| \int_a^b f^+(x)\,dx + \int_a^b f^-(x)\,dx \right| \leq \left| \int_a^b f^+(x)\,dx \right| + \left| \int_a^b f^-(x)\,dx \right|$$

Cioè:

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \left| \int_a^b f^+(x)\,dx \right| + \left| \int_a^b f^-(x)\,dx \right|, \quad \forall a, b \in X \tag{7}$$

Distinguiamo i due casi:

1. $a < b$
2. $a > b$

Nel caso 1 è

$$\int_a^b f^+(x)\,dx \geq 0, \quad \int_a^b f^-(x)\,dx \leq 0$$

Quindi la (7) si scrive:

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b f^+(x)\,dx - \int_a^b f^-(x)\,dx = \int_a^b |f(x)|\,dx$$

Ma

$$a < b \Longrightarrow \int_a^b |f(x)|\,dx \geq 0 \Longrightarrow \int_a^b |f(x)|\,dx = \left| \int_a^b |f(x)|\,dx \right|,$$

onde l'asserto. Nel caso 2 è

$$\int_a^b f^+(x)\,dx \le 0, \qquad \int_a^b f^-(x)\,dx \ge 0$$

Quindi la (7) si scrive:

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| &\le -\int_a^b f^+(x)\,dx + \int_a^b f^-(x)\,dx = \\ &= -\left[\int_a^b f^+(x)\,dx - \int_a^b f^-(x)\,dx\right] = -\int_a^b |f(x)|\,dx\end{aligned}$$

Ma

$$b < a \Longrightarrow \int_a^b |f(x)|\,dx \le 0 \Longrightarrow -\int_a^b |f(x)|\,dx = \left|\int_a^b |f(x)|\,dx\right|,$$

onde l'asserto. ■

Teorema 5 *Sia $f : X \to \mathbb{R}$ continua e non negativa nell'intervallo $X \subseteq \mathbb{R}$.*

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0 \Longleftrightarrow f(x) = 0, \quad \forall x \in [a,b] \subset X$$

Dimostrazione. Implicazione inversa.

Hp. $f(x) = 0, \quad \forall x \in [a,b]$

Th. $\int_a^b f(x)\,dx = 0$

$$\forall x \in [a,b], \quad f(x) = 0 \Longrightarrow \left(\forall \mathcal{D}(x_0, x_1, ..., x_n), \ \sigma_{\mathcal{D}} = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) = 0, \ \ \forall \xi_k \in [x_k, x_{k+1}]\right)$$

$$\Longrightarrow \lim_{\delta \to 0} \sigma_{\mathcal{D}} = 0$$

Implicazione diretta.

Hp. $\int_a^b f(x)\,dx = 0$

Th. $f(x) = 0, \quad \forall x \in [a,b]$

Procediamo per assurdo. La negazione della tesi è: f è non identicamente nulla in $[a,b]$, per cui essendo f non negativa per ipotesi, si ha:

$$\exists x_0 \in [a,b] \mid f(x_0) > 0 \underset{f \text{ è continua}}{\Longrightarrow} \exists I(x_0) \subset [a,b] \mid f(x) > 0, \quad \forall x \in I(x_0),$$

essendo $I(x_0)$ un intorno di x_0. Da ciò segue:

$$f \text{ è continua in } [a',b'] \subset I(x_0) \Longrightarrow \exists m = \min_{[a',b']} f,$$

per cui

$$\mu(\mathcal{R}) = m(b' - a') > 0,$$

dove $\mathcal{R} = [a',b'] \times [0,m]$. D'altra parte,se T è il rettangoloide di base $[a,b]$ relativo a f:

$$\mathcal{R} \subseteq T \Longrightarrow \mu(\mathcal{R}) \le \mu(T),$$

cioè:

$$\int_a^b f(x)\,dx \ge m(b' - a') > 0,$$

che è una negazione dell'ipotesi, onde l'asserto. ■

Teorema 6 ***(Proprietà additiva)***
Se $f : X \to \mathbb{R}$ è continua in nell'intervallo $X \subseteq \mathbb{R}$, riesce:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx, \qquad \forall a,b,c \in X \tag{8}$$

Dimostrazione. Distinguiamo i due casi:

1. $c \in (a,b)$
2. $c \in (-\infty, a) \cup (b, +\infty)$

Il caso 1 contempla due sottocasi:

A. f ha segno costante in $[a,b]$

B. f non ha segno costante in $[a,b]$

Nel sottocaso **A**, supponendo senza perdita di generalità che f sia non negativa, si ha il rettangoloide di base $[a,b]$ relativo a f è tale che:

$$T = T_1 \cup T_2, \quad \mathring{T}_1 \cap \mathring{T}_2 = \emptyset,$$

essendo T_1 e T_2 i rettangoloidi di base $[a,c]$ e $[c,b]$ rispettivamente:

$$\begin{aligned} T_1 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq c, \quad 0 \leq y \leq f(x)\right\} \\ T_2 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq x \leq b, \quad 0 \leq y \leq f(x)\right\}, \end{aligned}$$

onde per la proprietà additiva della misura:

$$\mu(T) = \mu(T_1) + \mu(T_2),$$

da cui l'asserto.

Nel sottocaso **B** risulta $f^-(x)$ non identicamente nulla, per cui:

$$f(x) = f^+(x) + f^-(x)$$

Ma $f^\pm$ hanno segno costante in $[a,b]$ per cui verificano la (8):

$$\int_a^b f^\pm(x)\,dx = \int_a^c f^\pm(x)\,dx + \int_c^b f^\pm(x)\,dx$$

D'altra parte (eq. 44 di questa dispensa)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f^+(x)\,dx + \int_a^b f^-(x)\,dx$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\,dx &= \int_a^c f^+(x)\,dx + \int_c^b f^+(x)\,dx + \int_a^c f^-(x)\,dx + \int_c^b f^-(x)\,dx \\ &= \underbrace{\int_a^c f^+(x)\,dx + \int_a^c f^-(x)\,dx}_{=\int_a^c f(x)dx} + \underbrace{\int_c^b f^+(x)\,dx + \int_c^b f^-(x)\,dx}_{=\int_c^b f(x)dx} \end{aligned}$$

Nel caso 2 supponiamo, senza perdita di generalità, $c > b$. In tal caso, per ciò che abbiamo appena dimostrato, si ha:

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

Ma

$$\int_b^c f(x)\,dx = -\int_c^b f(x)\,dx,$$

per cui

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$$

cioè l'asserto. ■

Lemma 7 *Se $f_1, f_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ sono continue in $[a,b]$, si ha:*

$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x)]\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx \tag{9}$$

Dimostrazione. La somma $f = f_1 + f_2$ è manifestamente continua in $[a,b]$, per cui:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\delta\to 0} \sigma_{\mathcal{D}},$$

dove

$$\sigma_{\mathcal{D}} = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k),$$

per una arbitraria decomposizione $\mathcal{D}(x_0, x_1, ..., x_n)$ di $[a,b]$ e per ogni $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$. Riesce:

$$\sigma_{\mathcal{D}} = \sigma_{\mathcal{D}}^{(1)} + \sigma_{\mathcal{D}}^{(2)},$$

essendo $\sigma_{\mathcal{D}}^{(1)}, \sigma_{\mathcal{D}}^{(2)}$ somme integrali relative a f_1, f_2:

$$\sigma_{\mathcal{D}}^{(h)} = \sum_{k=0}^{n-1} f_h(\xi_k)(x_{k+1} - x_k), \quad (h = 1, 2),$$

per cui

$$\lim_{\delta\to 0} \sigma_{\mathcal{D}} = \underbrace{\lim_{\delta\to 0} \sigma_{\mathcal{D}}^{(1)}}_{=\int_a^b f_1(x)dx} + \underbrace{\lim_{\delta\to 0} \sigma_{\mathcal{D}}^{(2)}}_{=\int_a^b f_2(x)dx},$$

cioè l'asserto. ■

Il lemma appena dimostrato ci permette di dimostrare la **proprietà distributiva** espressa dal seguente teorema:

Teorema 8 *Se $f_1, f_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ sono continue in $[a,b]$, si ha per ogni $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$:*

$$\int_a^b [c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)]\,dx = c_1 \int_a^b f_1(x)\,dx + c_2 \int_a^b f_2(x)\,dx$$

Dimostrazione. Per il teorema precedente:

$$\int_a^b \left[c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)\right] dx = \int_a^b c_1 f_1(x)\, dx + \int_a^b c_2 f_2(x)\, dx$$

Se $\mathcal{D}(x_0, x_1, ..., x_n)$ è una qualunque decomposizione di $[a, b]$, per ogni $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$ si ha:

$$\begin{aligned}\int_a^b c_1 f_1(x)\, dx &= \lim_{\delta \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} c_1 f_1(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) \\ &= c_1 \lim_{\delta \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f_1(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) \\ &= c_1 \int_a^b f_1(x)\, dx\end{aligned}$$

Ovviamente analogo risultato per f_2, da cui l'asserto. ■

Osservazione 9 *Per quanto precede, se f è una funzione continua in $[a, b]$ e $c \in \mathbb{R}$, si ha:*

$$\int_a^b cf(x)\, dx = c \int_a^b f(x)\, dx$$

In altri termini, un qualunque fattore costante può essere portato fuori dal segno di integrale.

Teorema 10 *$f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue in $[a, b]$.*

$$\forall x \in [a, b], \;\; f(x) \leq g(x) \Longrightarrow \int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx \tag{10}$$

Dimostrazione. Riesce

$$g(x) - f(x) \geq 0, \quad \forall x \in [a, b]$$

Per il teorema 3:

$$\int_a^b \left[g(x) - f(x)\right] dx \geq 0$$

Per la (9) segue l'asserto. ■

Teorema 11 *(**Teorema della media**)*

$$f \text{ è continua in } [a, b] \Longrightarrow \exists \eta \in \left[\min_{[a,b]} f, \max_{[a,b]} f\right] \mid \int_a^b f(x)\, dx = \eta(b - a) \tag{11}$$

Dimostrazione. Eseguita una partizione $\mathcal{D}(x_0, x_1, ..., x_n)$ di $[a, b]$:

$$m(b - a) \leq \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) \leq M(b - a), \tag{12}$$

avendo posto $m = \min_{[a,b]} f$, $M = \max_{[a,b]} f$. Eseguendo nella (12) il limite per $\delta \to 0$:

$$m \leq \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)\, dx \leq M$$

o, ciò che è lo stesso:

$$\frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)\, dx \overset{def}{=} \eta \in [m, M]$$

■

Tenendo conto di una nota proprietà delle funzioni continue in un intervallo chiuso e limitato, si ha il seguente corollario:

Corollario 12

$$f \text{ è continua in } [a,b] \Longrightarrow \exists \xi \in [a,b] \mid \int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a)$$

Il numero reale

$$\eta = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \tag{13}$$

si chiama **media integrale** della funzione f nell'intervallo $[a,b]$. Per giustificare tale denominazione, eseguiamo una equipartizione (cfr.questa dispensa) $\mathcal{D}_e(x_0, x_1, ..., x_n)$ dell'intervallo $[a,b]$ di norma $\delta_n = \frac{b-a}{n}$, per cui:

$$x_k = a + k\delta_n, \quad (k = 0, 1, ..., n)$$

Assumendo $\xi_k = x_{k+1}$, la relativa somma integrale si scrive:

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1}) \\ &= (b-a)\,\eta_n,\end{aligned} \tag{14}$$

dove

$$\eta_n \stackrel{def}{=} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1}) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n)}{n}, \tag{15}$$

è la media aritmetica dei valori assunti dalla funzione f in n punti equidistanti dell'intervallo $[a,b]$. Con tale posizione passiamo dalla successione reale $\{\sigma_n\}_{n\in\mathbb{N}-\{0\}}$ alla successione reale $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{N}-\{0\}}$, i cui termini differiscono da quelli di $\{\sigma_n\}_{n\in\mathbb{N}-\{0\}}$ per il fattore moltiplicativo $(b-a)^{-1}$:

$$\eta_n = \frac{\sigma_n}{b-a}$$

Eseguendo l'operazione di passaggio al limite per $n \to +\infty$, i.e. per $\delta_n \to 0$, si ha:

$$\lim_{n\to+\infty} \eta_n = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx,$$

cosicchè

$$\eta = \lim_{n\to+\infty} \eta_n,$$

per cui η è il limite per $n \to +\infty$ della media aritmetica η_n. Ad esempio, nel caso della funzione $f(x) = x^2$, utilizzando *Mathematica* possiamo graficare l'andamento della successione $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{N}-\{0\}}$, come riportato in fig. 5.

***

Il teorema della media è un caso particolare del seguente teorema:

Teorema 13 *Siano* $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *continue in* $[a,b]$.

$$g \text{ è non negativa} \Longrightarrow \exists \xi \in [a,b] \mid \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx \tag{16}$$

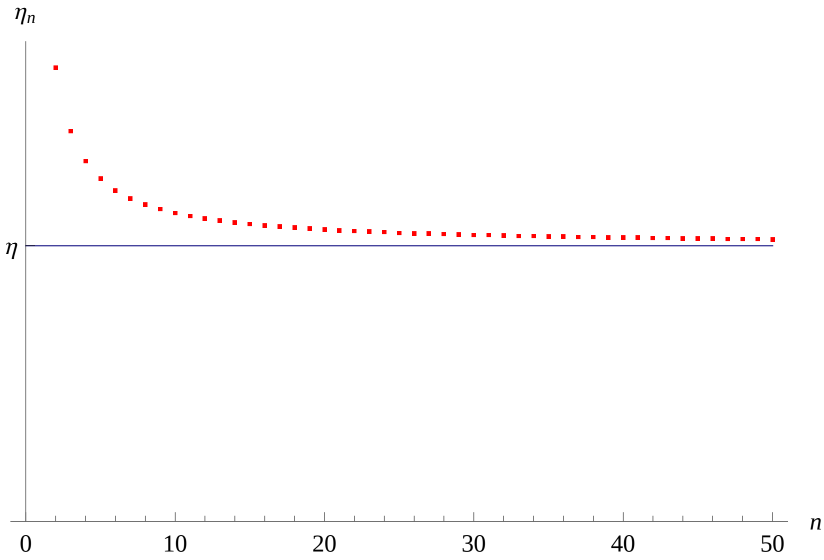


Figura 5: Andamento della media aritmetica $\eta_n = \frac{1}{n}\Sigma_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1})$ per $f(x) = x^2$, confrontato con $\eta = \frac{\int_1^5 x^2 sx}{4}$.

Dimostrazione. Se g è identicamente nulla, la (16) si riduce all'identità $0 = 0$. Diversamente, ponendo $m = \min_{[a,b]} f$, $M = \max_{[a,b]} f$, si ha:

$$mg(x) \leq f(x) g(x) \leq Mg(x),$$

onde per il teorema 10

$$f(x) g(x) \leq Mg(x) \Longrightarrow \int_a^b f(x) g(x) \, dx \leq M \int_a^b g(x) \, dx$$
$$mg(x) \leq f(x) g(x) \Longrightarrow m \int_a^b g(x) \, dx \leq \int_a^b f(x) g(x) \, dx$$

Cioè

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x) g(x) \, dx}{\int_a^b g(x) \, dx} \leq M \Longrightarrow \exists \eta \in [m, M] \mid \eta = \frac{\int_a^b f(x) g(x) \, dx}{\int_a^b g(x) \, dx}$$
$$\Longrightarrow \exists \xi \in [a, b] \mid f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x) g(x) \, dx}{\int_a^b g(x) \, dx}$$

■

Se nella (16) si pone $g(x) \equiv 1$, si ottiene il teorema della media.