

Tensori completamente antisimmetrici

Marcello Colozzo – <http://www.extrabyte.info>

Continuiamo a considerare – senza perdita di generalità (escludendo i tensori misti) – un tensore T covariante di rango r

$$\begin{aligned} T &: E_n \times E_n \times \dots \times E_n \longrightarrow \mathbb{K} \\ T &: (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r) \longrightarrow T(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r) \end{aligned} \quad (1)$$

Definizione 1 *Il tensore (1) si dice **completamente antisimmetrico** se cambia di segno in seguito a una permutazione di due argomenti consecutivi $\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_{i+1}$ presi ad arbitrio.*

Tale definizione si generalizza a un tensore controvariante di rango qualsiasi. Inoltre, ha carattere intrinseco, ossia indipendente dalla base. Viceversa, il riferimento a una base restituisce la proposizione:

Proposizione 2 *Un tensore r -covariante (o r -controvariante) è completamente antisimmetrico se e solo se comunque prendiamo una base dello spazio vettoriale a cui esso appartiene, le sue componenti cambiano segno in seguito a una permutazione di due indici consecutivi presi ad arbitrio.*

Dimostrazione. Senza perdita di generalità, consideriamo un tensore doppio covariante:

$$\begin{aligned} T &: E_n \times E_n \longrightarrow \mathbb{K} \\ T &: (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \longrightarrow T(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \end{aligned} \quad (2)$$

Comunque prendiamo una base $\{\mathbf{e}_i\}$ di E_n , è univocamente determinata la base duale $\{\theta^j\}$: $\langle \mathbf{e}_i, \theta^j \rangle = \delta_i^j$ e quindi la seguente base di $E_n^{*(2)} = E_n^* \otimes E_n^*$

$$\{\theta^i \otimes \theta^k\},$$

cosicché

$$T = T_{ik} \theta^i \otimes \theta^k$$

Ne consegue

$$T(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = T_{ik} (\theta^i \otimes \theta^k)(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$$

Cioè

$$T(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = T_{ik} \langle \mathbf{v}_1, \theta^i \rangle \langle \mathbf{v}_2, \theta^k \rangle \quad (3)$$

Permutando gli argomenti:

$$\underbrace{T(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1)}_{=-T(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)} = T_{ik} \langle \mathbf{v}_2, \theta^i \rangle \langle \mathbf{v}_1, \theta^k \rangle = T_{ik} \langle \mathbf{v}_1, \theta^k \rangle \langle \mathbf{v}_2, \theta^i \rangle$$

i, k sono indici muti e come tali posso chiamarli come mi pare. Quindi i lo chiamo k , e k lo chiamo i :

$$-T(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = T_{ki} \langle \mathbf{v}_1, \theta^i \rangle \langle \mathbf{v}_2, \theta^k \rangle \quad (4)$$

Sommo le (3)-(4):

$$0 = (T_{ik} + T_{ki}) \langle \mathbf{v}_1, \theta^i \rangle \langle \mathbf{v}_2, \theta^k \rangle, \quad \forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in E_n$$

Cioè

$$T_{ik} = -T_{ki}, \quad i, k = 1, 2, \dots, n$$

■

Osservazione 3 Per un tensore di rango 2 (covariante o controvariante) la completa antisimmetria è semplicemente una “antisimmetria”, giacchè abbiamo solo 2 indici.

Denotiamo con σ una permutazione degli elementi della r -pla $(1, 2, \dots, r)$. Dal calcolo combinatorio ricordiamo che il *segno* di σ è

$$\text{sign}\sigma = \begin{cases} +1, & \text{se } \sigma \text{ è di classe pari} \\ -1, & \text{se } \sigma \text{ è di classe dispari} \end{cases} ,$$

rammentando che la parità (± 1) si riferisce alla parità del numero di permutazioni eseguite per riportare la r -pla $(i_1, i_2, \dots, i_r)$ nella r -pla “fondamentale” $(1, 2, \dots, r)$ o ciò che è lo stesso, il numero di permutazioni eseguite nella permutazione:

$$(1, 2, \dots, r) \xrightarrow{\sigma} (i_1, i_2, \dots, i_r), \quad \forall i_k \in \{1, 2, \dots, r\}$$

Ad esempio

$$\begin{aligned} (1, 2, 3, 4) &\xrightarrow{\sigma_a} (2, 1, 3, 4) & \text{sign}\sigma_a &= -1 \\ (1, 2, 3, 4) &\xrightarrow{\sigma_b} (2, 1, 4, 3) & \text{sign}\sigma_b &= +1 \end{aligned}$$

Quindi

$$T(\mathbf{v}_{i_1}, \mathbf{v}_{i_2}, \dots, \mathbf{v}_{i_r}) = (\text{sign}\sigma) T(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r)$$

Proposizione 4 Se due qualunque degli argomenti di un tensore completamente antisimmetrico coincidono, allora il tensore assegnato è il tensore nullo.

Dimostrazione. Senza perdita di generalità, supponiamo $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$, per cui

$$T(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r) = -T(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r),$$

onde l'asserto. ■