
Supplementare del sottospazio delle matrici a traccia nulla

Marcello Colozzo <http://www.extrabyte.info>

Sia $M_{\mathbb{R}}(2, 2)$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine n sul campo reale.

1. Mostrare che l'insieme delle matrici a traccia nulla:

$$T_{\mathbb{R}}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in M_{\mathbb{R}}(2, 2) \mid x_1 + x_4 = 0 \right\} \quad (1)$$

è un sottospazio di $M_{\mathbb{R}}(2, 2)$, e determinarne la dimensione.

2. Determinare un supplementare $V_{\mathbb{R}}(2)$ del sottospazio $T_{\mathbb{R}}(2)$.

3. Esprimere un generico vettore di $M_{\mathbb{R}}(2, 2)$ come somma di un vettore di $T_{\mathbb{R}}(2)$ e di un vettore di $W_{\mathbb{R}}(2)$.

Soluzione

Siano

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in T_{\mathbb{R}}(2) \implies x_1 + x_4 = 0 \quad (2)$$

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix} \in T_{\mathbb{R}}(2) \implies y_1 + y_4 = 0$$

Quindi

$$X + Y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 & x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 & x_4 + y_4 \end{pmatrix},$$

la cui traccia è

$$Tr(X + Y) = x_1 + y_1 + x_4 + y_4 = \underbrace{(x_1 + x_4)}_{=0} + \underbrace{(y_1 + y_4)}_{=0} = 0 \implies (X + Y) \in T_{\mathbb{R}}(2) \quad (3)$$

Inoltre

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall X \in T_{\mathbb{R}}(2), \lambda X = \begin{pmatrix} \lambda x_1 & \lambda x_2 \\ \lambda x_3 & \lambda x_4 \end{pmatrix} \implies Tr(\lambda X) = \lambda(x_1 + x_4) = 0 \implies (\lambda X) \in T_{\mathbb{R}}(2) \quad (4)$$

Le (3)-(4) implicano che $T_{\mathbb{R}}(2)$ è un sottospazio vettoriale di $M_{\mathbb{R}}(2, 2)$. Per determinarne una base e, quindi, la dimensione, scriviamo un suo generico vettore come:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & -x_1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Ne consegue che una base di $T_{\mathbb{R}}(2)$ è

$$\Sigma = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \implies \dim T_{\mathbb{R}}(2) \quad (6)$$

Per determinare un supplementare di $T_{\mathbb{R}}(2)$ scriviamo

$$\exists V_{\mathbb{R}}(2) \subset M_{\mathbb{R}}(2,2) \mid T_{\mathbb{R}}(2) \oplus V_{\mathbb{R}}(2) = M_{\mathbb{R}}(2,2),$$

per cui

$$\underbrace{\dim T_{\mathbb{R}}(2)}_{=3} + \dim V_{\mathbb{R}}(2) = \underbrace{\dim M_{\mathbb{R}}(2,2)}_{=4} \implies \dim V_{\mathbb{R}}(2) = 1 \quad (7)$$

La base canonica di $M_{\mathbb{R}}(2,2)$ è:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

Segue

$$\exists j \in \{1, 2, 3, 4\} \mid \{E_j\} \text{ è una base di } V_{\mathbb{R}}(2)$$

Per definizione di somma diretta:

$$T_{\mathbb{R}}(2) \cap W_{\mathbb{R}}(2) = \{\mathbf{0}\} \implies E_j \notin T_{\mathbb{R}}(2)$$

Dalla (6) si ottiene $j = 4$. Cioè

$$E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin T_{\mathbb{R}}(2) \quad (9)$$

Ne consegue che $\{E_4\}$ è una base di $V_{\mathbb{R}}(2)$:

$$Z \in V_{\mathbb{R}}(2) \iff \exists x_4 \in \mathbb{R} \mid Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & x_4 \end{pmatrix} \quad (10)$$

Per rispondere all'ultimo quesito osserviamo innanzitutto che per una nota proprietà della somma diretta, un elemento di $M_{\mathbb{R}}(2,2)$ si esprime univocamente come somma di un vettore di $T_{\mathbb{R}}(2)$ e di un vettore di $V_{\mathbb{R}}(2)$:

$$X \in M_{\mathbb{R}}(2,2) \implies \exists! (Y, Z) \in T_{\mathbb{R}}(2) \times W_{\mathbb{R}}(2) \mid X = Y + Z \quad (11)$$

Riesce

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & -x_1 \end{pmatrix}}_{\in T_{\mathbb{R}}(2)} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & x_1 + x_4 \end{pmatrix}}_{\in V_{\mathbb{R}}(2)}, \quad (12)$$

che implementa la decomposizione richiesta.