

---

# Supplementare del sottospazio delle matrici simmetriche

Marcello Colozzo <http://www.extrabyte.info>

Sia  $M_{\mathbb{R}}(2, 2)$  lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine  $n$  sul campo reale.

1. Determinare un supplementare  $W_{\mathbb{R}}(2)$  del sottospazio  $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(2)$  delle matrici simmetriche.
2. Esprimere un generico vettore di  $M_{\mathbb{R}}(2, 2)$  come somma di un vettore di  $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(2)$  e di un vettore di  $W_{\mathbb{R}}(2)$ .

## Soluzione

**Sappiamo** che una base di  $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(2)$  è:

$$\Sigma = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \quad (1)$$

La nostra richiesta è

$$\exists W_{\mathbb{R}}(2) \subset M_{\mathbb{R}}(2, 2) \mid \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(2) \oplus W_{\mathbb{R}}(2) = M_{\mathbb{R}}(2, 2),$$

per cui

$$\underbrace{\dim \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(2)}_{=3} + \dim W_{\mathbb{R}}(2) = \underbrace{\dim M_{\mathbb{R}}(2, 2)}_{=4} \implies \dim W_{\mathbb{R}}(2) = 1 \quad (2)$$

La base canonica di  $M_{\mathbb{R}}(2, 2)$  è:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Segue

$$\exists j \in \{1, 2, 3, 4\} \mid \{E_j\} \text{ è una base di } W_{\mathbb{R}}(2)$$

Per definizione di somma diretta:

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(2) \cap W_{\mathbb{R}}(2) = \{\mathbf{0}\} \implies E_j \notin \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(2)$$

Dalla (1) si ottiene  $j = 3$ . Cioè

$$E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \notin \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(2) \quad (4)$$

Ne consegue che  $\{E_3\}$  è una base di  $W_{\mathbb{R}}(2)$ :

$$Z \in W_{\mathbb{R}}(2) \iff \exists x_3 \in \mathbb{R} \mid Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x_3 & 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Per rispondere all'ultimo quesito osserviamo innanzitutto che per una nota proprietà della somma diretta, un elemento di  $M_{\mathbb{R}}(2, 2)$  si esprime univocamente come somma di un vettore di  $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(2)$  e di un vettore di  $W_{\mathbb{R}}(2)$ :

$$X \in M_{\mathbb{R}}(2, 2) \implies \exists! (Y, Z) \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(2) \times W_{\mathbb{R}}(2) \mid X = Y + Z \quad (6)$$

---

Scriviamo

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

cosicché

$$\begin{aligned} X &= \xi_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \xi_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \xi_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \xi_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ \xi_2 + \xi_4 & \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} \xi_1 = x_1 \\ \xi_2 = x_2 \\ \xi_2 + \xi_4 = x_3 \\ \xi_3 = x_4 \end{cases} \end{aligned}$$

Cioè

$$\xi_1 = x_1, \xi_2 = x_2, \xi_3 = x_4, \xi_4 = x_3 - x_2$$

Segue

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & x_2 \\ x_2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x_3 - x_2 & 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_4 \end{pmatrix}}_{\in \mathcal{S}_R(2)} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x_3 - x_2 & 0 \end{pmatrix}}_{\in W_R(2)}, \quad (9)$$

che implementa la decomposizione richiesta.