Supplementare ortogonale

Marcello Colozzo – http://www.extrabyte.info

Sia V uno spazio vettoriale con prodotto scalare su un campo $\mathbb{K}$, di dimensione finita.

Definizione 1 *Se W è un sottospazio vettoriale di V, il* **supplementare ortogonale** *di V è il sottoinsieme di V:*

$$W^{\perp} = \{\eta \in V \mid \langle \xi, \eta \rangle = 0, \quad \forall \xi \in W\}, \tag{1}$$

dove $\langle , \rangle$ denota il prodotto scalare in V.

Proposizione 2 *Il supplementare ortogonale è un sottospazio vettoriale di V.*

Dimostrazione. Se $\eta, \zeta \in W^{\perp}$

$$\langle \eta, \xi \rangle = 0, \quad \langle \zeta, \xi \rangle = 0, \quad \forall \xi \in V \tag{2}$$

Segue

$$\langle \eta + \zeta, \xi \rangle = \langle \eta, \xi \rangle + \langle \zeta, \xi \rangle = 0 \Longrightarrow (\eta + \zeta) \in W^{\perp} \tag{3}$$

Per $\lambda \in \mathbb{C}$ e $\eta \in W^{\perp}$:

$$0 = \lambda \langle \eta, \xi \rangle = \langle \lambda \eta, \xi \rangle \Longrightarrow (\lambda \eta) \in W^{\perp} \tag{4}$$

Dalle (3)-(4) segue l'asserto. ■

Sussiste il seguente teorema di cui omettiamo la dimostrazione:

Teorema 3

$$\forall W \textit{ sottospazio di } V, \; \exists ! W^{\perp} \tag{5}$$

Inoltre

$$V = W \oplus W^{\perp} \tag{6}$$

Dalla formula di Grassmann si ha

$$\dim W^{\perp} = \dim V - \dim W \tag{7}$$

Esercizio 4 *Consideriamo lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^5$ strutturato come spazio euclideo con prodotto scalare canonico. Determinare il supplementare ortogonale del sottospazio*

$$W = \mathcal{L}(\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}), \tag{8}$$

dove $\mathcal{L}$ denota l'operazione di inviluppo lineare, per cui W è generato da $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, mentre

$$\varepsilon_1 = (1, 2, 3, -1, 2), \; \varepsilon_2 = (2, 4, 7, 2, -1) \tag{9}$$

Soluzione

Dalla (7):

$$\dim W^{\perp} = 3$$

Deve essere

$$\eta \in W^{\perp} \Longleftrightarrow \langle \eta, \varepsilon_1 \rangle = 0, \; \langle \eta, \varepsilon_2 \rangle = 0$$

Posto $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5)$ e sviluppando il prodotto scalare si perviene a

$$\begin{cases} \eta_1 + 2\eta_2 + 3\eta_3 - \eta_4 + 2\eta_5 = 0 \\ 2\eta_1 + 4\eta_2 + 7\eta_3 + 2\eta_4 - \eta_5 = 0 \end{cases}, \tag{10}$$

che è un sistema lineare omogeneo nelle incognite $(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5)$, la cui matrice dei coefficienti è:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 7 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

il cui rango è $\rho(M) = 2 \Longrightarrow \exists \infty^3$ soluzioni non banali. Assumiamo come determinante fondamentale

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 1$$

per cui

$$\begin{cases} \eta_1 + 3\eta_3 = 2\eta_2 + \eta_4 - 2\eta_5 \\ 2\eta_1 + 7\eta_3 = -4\eta_2 - 2\eta_4 + \eta_5 \end{cases}, \quad \forall \eta_2, \eta_4, \eta_5 \in \mathbb{R}$$

Risolvendo con la regola di Cramer:

$(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5) = (-2\eta_2 + 13\eta_4 - 17\eta_5, \eta_2, -4\eta_4 + 5\eta_5, \eta_4, \eta_5)$
$= (-2\eta_2, \eta_2, 0, 0, 0) + (13\eta_4, 0, -4\eta_4, \eta_4, 0) + (-17\eta_5, 0, 5\eta_5, 0, \eta_5)$

Cioè

$$(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5) = \eta_2(-2, 1, 0, 0, 0) + \eta_4(13, 0, -4, 1, 0) + \eta_5(-17, 0, 5, 0, 1), \ \forall \eta_2, \eta_4, \eta_5 \in \mathbb{R}$$

Quindi

$$W = \mathcal{L}(\{\chi_1, \chi_2, \chi_3\}), \tag{11}$$

dove

$$\begin{aligned} \chi_1 &= (-2, 1, 0, 0, 0) \\ \chi_2 &= (13, 0, -4, 1, 0) \\ \chi_3 &= (-17, 0, 5, 0, 1) \end{aligned} \tag{12}$$