
Superficie regolare. Lezione 2

Marcello Colozzo

Nella Lezione precedente abbiamo introdotto la nozione di *superficie regolare*. Per essere più precisi, quest'ultima è una classe di equivalenza nell'insieme di tutte le possibili rappresentazioni parametriche regolari. Ne consegue che una definizione più rigorosa si riferisce a una rappresentazione parametrica *regolare*, che per comodità ripetiamo:

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v) \quad (1)$$

essendo

Definizione 1 1. $x(u, v), y(u, v), z(u, v) \in C^1(D)$

2. $\rho(J) = 2$, dove J è la matrice jacobiana delle funzioni $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$, mentre ρ indica il rango:

$$J = \begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}, \quad (2)$$

essendo $x_u = \frac{\partial x}{\partial u}$, etc.

3. $\forall (u, v), (u', v') \in D$, con $(u, v) \neq (u', v')$, si ha:

$$(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \neq (x(u', v'), y(u', v'), z(u', v'))$$

Si noti che le (1) possono essere scritte in forma vettoriale

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v), \quad \forall (u, v) \in D \quad (3)$$

essendo $\mathbf{r}(u, v)$ una *funzione vettoriale* delle variabili scalari u, v . Precisamente e con ovvio significato dei simboli:

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k} \quad (4)$$

Specifichiamo il punto 2 della definizione di rappresentazione regolare. A tale scopo denotiamo con L, M, N i minori estratti dalla matrice jacobiana presi con segni alterni:

$$L = \begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}, \quad M = \begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}, \quad N = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix},$$

onde

$$\rho(J) = 2 \iff L^2 + M^2 + N^2 > 0$$

Seguono le definizioni:

Definizione 2 Dicesi **interno di S** , l'insieme

$$\text{int}(S) = \left\{ (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \in S \mid (u, v) \in \overset{\circ}{D} \right\} \quad (5)$$

Si noti che l'interno di S non è inteso nel topologico del termine.

Definizione 3 Dicesi **interno di** S , l'insieme

$$B(S) = \{(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \in S \mid (u, v) \in \partial D\}$$

Anche qui il bordo di S non è inteso nel topologico del termine.

È facile convincersi che a una qualunque curva C tracciata in D , corrisponde univocamente una curva Γ tracciata su S . Un caso speciale è quello in cui C è una curva regolare. Sussiste la proposizione:

Proposizione 4 A ogni curva regolare tracciata in D , corrisponde una curva regolare tracciata su S .

Dimostrazione. Sia C una curva regolare contenuta nell'interno di D , di rappresentazione parametrica:

$$x = x(t), y = y(t), t \in [a, b] \quad (6)$$

A tale curva corrisponde univocamente la seguente curva tracciata su S , quale luogo dei punti:

$$\Gamma = \{(x, y, z) \in S \mid x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v), (u, v) \in C\}$$

Una rappresentazione parametrica di Γ è

$$x = \alpha(t), y = \beta(t), z = \gamma(t), t \in [a, b],$$

avendo definito le funzioni composte:

$$\alpha(t) = x[u(t), v(t)], \text{ etc.}$$

Ciò premesso, dalla

$$(u(t'), v(t')) \neq (u(t''), v(t'')), \forall t', t'' \in [a, b], t' \neq t''$$

segue

$$(\alpha(t'), \beta(t'), \gamma(t')) \neq (\alpha(t''), \beta(t''), \gamma(t'')), \forall t', t'' \in [a, b], t' \neq t''$$

In altri termini, esiste una corrispondenza biunivoca tra i punti di Γ e i punti dell'intervallo base $[a, b]$. Abbiamo quindi dimostrato una delle condizioni per la regolarità di Γ . Inoltre, per una nota proprietà delle funzioni composte, segue

$$u(t), v(t) \in C^1([a, b]) \implies \alpha(t), \beta(t), \gamma(t) \in C^1([a, b])$$

Resta da dimostrare che le derivate $\alpha'(t), \beta'(t), \gamma'(t)$ non si annullano mai simultaneamente. Abbiamo per un noto teorema di derivazione delle funzioni composte:

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= x_u u'(t) + x_v v'(t) \\ \beta'(t) &= y_u u'(t) + y_v v'(t) \\ \gamma'(t) &= z_u u'(t) + z_v v'(t) \end{aligned}$$

Procedendo per assurdo:

$$\begin{cases} x_u u'(t) + x_v v'(t) = 0 \\ y_u u'(t) + y_v v'(t) = 0 \\ z_u u'(t) + z_v v'(t) = 0 \end{cases},$$

che è un sistema lineare omogeneo nelle incognite $(u'(t), v'(t))$, la cui matrice dei coefficienti è

$$M = J^T$$

Dal momento che il rango di J è 2:

$$\rho(M) = 2 \implies \exists! \text{ soluzione banale}$$

Cioè $u'(t) = v'(t) = 0$ che è manifestamente la negazione dell'ipotesi di regolarità di C , da cui l'asserto. ■