Successione di matrici

Marcello Colozzo – http://www.extrabyte.info

Esercizio 1 *Sia data la successione di matrici:*

$$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}-\{0\}} : A_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{a}{n} \\ -\frac{a}{n} & 1 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

con a parametro reale non nullo. Determinare:

1. $$\lim_{n\to+\infty} A_n \tag{2}$$

2. *Il sottospazio di $\mathcal{M}_{\mathcal{R}}(2,2)$ i cui elementi commutano con A_n.*

Soluzione

Il primo quesito è immediato:

$$\lim_{n\to+\infty} A_n = \lim_{n\to+\infty} \begin{pmatrix} 1 & \frac{a}{n} \\ -\frac{a}{n} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

cioè la matrice identità di ordine 2. Per il secondo quesito, denotiamo con X la più generale matrice quadrata di ordine 2 che commuta con A_n:

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix},$$

Esplicitiamo i prodotti:

$$A_n X = \begin{pmatrix} x+\frac{a}{n}z & y+\frac{a}{n}t \\ -\frac{a}{n}x+z & t-\frac{a}{n}y \end{pmatrix} \tag{4}$$
$$X A_n = \begin{pmatrix} x-\frac{a}{n}y & y+\frac{a}{n}x \\ z-\frac{a}{n}t & t+\frac{a}{n}z \end{pmatrix}$$

Deve essere

$$A_n X = X A_n \Longleftrightarrow \begin{cases} x+\frac{a}{n}z = x-\frac{a}{n}y \\ y+\frac{a}{n}t = y+\frac{a}{n}x \\ -\frac{a}{n}x+z = z-\frac{a}{n}t \\ t-\frac{a}{n}y = t+\frac{a}{n}z \end{cases} \tag{5}$$
$$\underset{\frac{a}{n}\neq 0}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} z=-y \\ x=t \end{cases},$$

per cui assumendo come parametri t, y

$$t=\lambda,\ y=\mu, \tag{6}$$

si ha

$$X = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ -\mu & \lambda \end{pmatrix}, \quad \forall\lambda,\mu\in\mathbb{R} \tag{7}$$

Segue

$$X = \lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ne concludiamo che una base del sottospazio $V_{\mathbb{R}}(2,2)$ delle matrici commutanti con A_n è

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \tag{8}$$

onde

$$\dim V_{\mathbb{R}}(2,2) = 2 \tag{9}$$