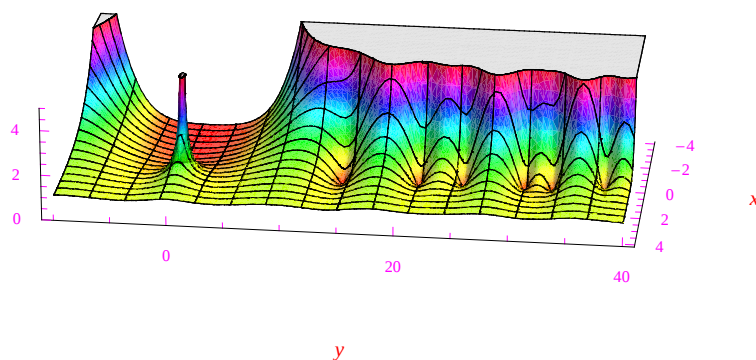


Matematica Open Source

$$\frac{d}{dx} f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \int f(x) dx = \oint_{\Gamma} (X dx + Y dy + Z dz)$$

Una possibile strategia per dimostrare la Congettura di Riemann

Marcello Colozzo



Indice

1	La Congettura di Riemann	2
1.1	La funzione zeta di Riemann e gli zeri non banali	2
2	Parametrizzazione delle variabili indipendenti	3
3	Sottovarietà regolari	13

1 La Congettura di Riemann

1.1 La funzione zeta di Riemann e gli zeri non banali

La *funzione zeta di Riemann* [1] è definita da

$$\zeta(z) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z}, \quad (1)$$

essendo $z = x + iy$ l'usuale variabile complessa. Al secondo membro troviamo una *serie di Dirichlet* la cui ascissa di convergenza è $x = 1$, i.e. la serie converge per $\operatorname{Re} z > 1$. Tuttavia, è possibile eseguire un prolungamento analitico della (1) su tutto il piano complesso escludendo la singolarità polare $z = 1$. Quindi, d'ora in avanti assumiamo:

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z}, \quad \forall z \in \mathbb{C} - \{1\} \quad (2)$$

Ciò premesso, enunciamo:

Congettura 1 (**Congettura di Riemann**)

$$\operatorname{Im} \rho \neq 0, \zeta(\rho) = 0 \implies \operatorname{Re} \rho = \frac{1}{2} \quad (3)$$

Definizione 2 *Gli zeri di $\zeta(z)$ con parte immaginaria non nulla si dicono **zeri non banali**, in contrapposizione a quelli che cadono sull'asse reale, denominati **zeri banali**.*

Dalla congettura (1) segue che gli zeri non banali cadono sulla cosiddetta **linea critica**, ovvero la retta per $x_0 = \frac{1}{2}$ e parallela all'asse immaginario.

In linea di principio, è possibile congetturare una distribuzione continua di zeri non banali:

$$\rho = \frac{1}{2} + i\alpha, \quad \alpha \in [\alpha_<, \alpha_>] \subseteq \mathbb{R}, \quad (4)$$

o una distribuzione numerabile:

$$\rho_n = \frac{1}{2} + i\alpha_n, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (5)$$

Attualmente è noto che l'insieme B degli zeri non banali è infinito numerabile, per cui è costituito da elementi del tipo (5).

Osservazione 3 *Gli zeri non banali della $\zeta(z)$ sono manifestamente di $f(x, y) \equiv |\zeta(z)|$, e ci si aspetta una distribuzione continua di zeri. Basti pensare al caso di funzioni reali delle variabili reali x, y , e che siano elementarmente esprimibili. Anche se nel caso della funzione zeta, abbiamo una serie di Dirichlet, il formalismo che svilupperemo giustifica la numerabilità dell'insieme B .*

Si badi che la congettura di Riemann non fornisce alcuna espressione per ciò che riguarda la distribuzione della parte immaginari degli zeri non banali. In altri termini, dimostrare la congettura non implica la determinazione dell'espressione analitica della successione di elementi di $\mathbb{R}$:

$$\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \quad (6)$$

Tuttavia, è possibile ricostruire numericamente (e quindi, via software) l'insieme:

$$\{\alpha_n\}_{n \in Z_N}, \quad (7)$$

dove $Z_N = \{-N, -N+1, \dots, N-1, N\} \subset \mathbb{Z}$, con $N \gg 1$ intero naturale determinato dai limiti computazionali della macchina che esegue il calcolo.

Per una nota proprietà della funzione zeta:

$$\zeta(\rho_n) = 0 \iff \zeta(\rho_n^*) = 0, \quad (8)$$

dove ρ_n^* è il complesso coniugato di ρ_n :

$$\rho_n^* = \frac{1}{2} - i\alpha_n \quad (9)$$

Cioè gli zeri della zeta di Riemann si distribuiscono lungo la linea critica per coppie complesse coniugate, da cui la simmetria della distribuzione rispetto all'asse reale, come appare in fig. 1.

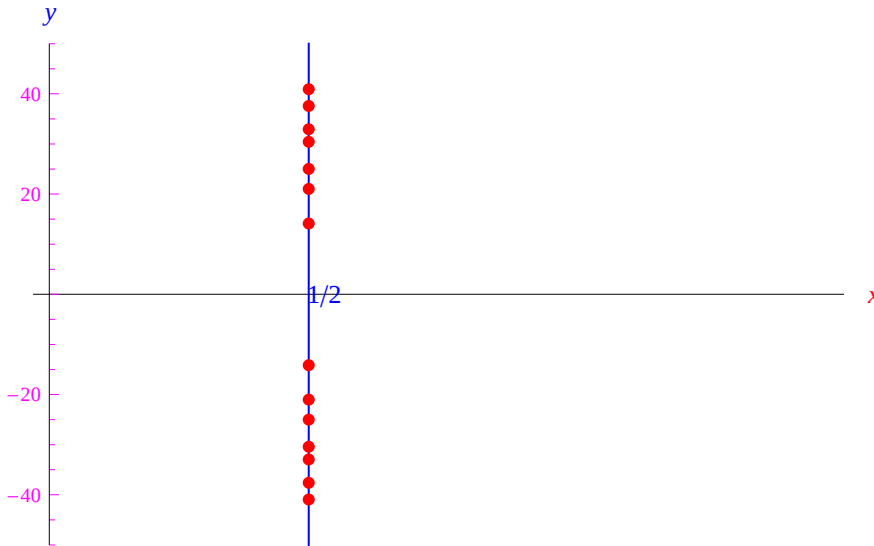


Figura 1: La distribuzione degli zeri non banali della funzione zeta di Riemann è simmetrica rispetto all'asse x .

2 Parametrizzazione delle variabili indipendenti

Riscriviamo la (1) nella forma:

$$\zeta(x + iy) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{x+iy}} \quad (10)$$

Parametizziamo x e y nel modo seguente: per un assegnato valore $x_0 \in \mathbb{R} - \{1\}$, consideriamo la retta passante per tale punto e parallela all'asse immaginario, come illustrato in fig. 2. Cioè

$$r : x = x_0, \quad y = t, \quad t \in (-\infty, +\infty)$$

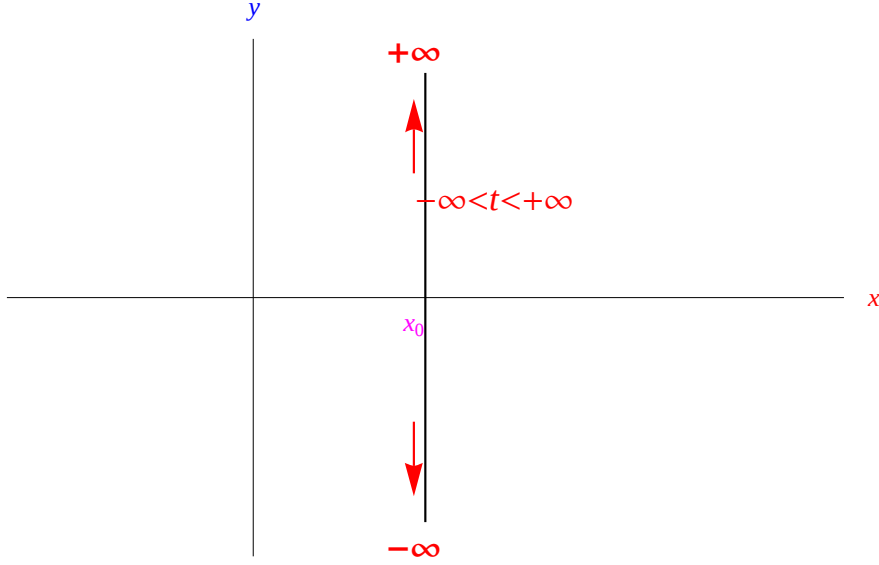


Figura 2: Per un assegnato $x_0 \neq 1$ consideriamo la retta per $(x_0, 0)$ e parallela all'asse y .

Prendendo $x_0 \neq 1$ ad arbitrio e ridifinendolo in x , si ha:

$$\psi(x, t) \stackrel{\text{def}}{=} \zeta(x + it) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-x} n^{-it} \quad (11)$$

Cioè

$$\psi(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-x \ln n} e^{-it \ln n},$$

che possiamo riscrivere come:

$$\psi(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \psi_n(x, t), \quad (12)$$

essendo

$$\psi_n(x, t) = u_n(x) e^{-i\omega_n t}, \quad (13)$$

dove:

$$u_n(x) = e^{-x \ln n}, \quad \omega_n = \omega_0 \ln n, \quad (\omega_0 = 1 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}) \quad (14)$$

Abbiamo quindi definito la funzione:

$$\begin{aligned} \psi &: A \rightarrow \mathbb{C} \\ \psi &: (x, t) \rightarrow \psi(x, t), \quad \forall (x, t) \in A, \quad A = \mathbb{R}^2 - \{(1, 0)\}, \quad \lim_{(x, t) \rightarrow (1, 0)} |\psi(x, t)| = +\infty \end{aligned} \quad (15)$$

che si presta ad un'interpretazione fisica: la sua parte reale è un campo scalare dipendente dal tempo t e dalla sola coordinata x in uno spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ che modella lo spazio fisico nel paradigma della fisica newtoniana (cfr. fig. 3).

Ne consegue che la serie di Dirichlet che definisce la funzione zeta, decompone il campo scalare $\psi(x, t)$ in componenti che a loro volta si presentano nel prodotto di una funzione reale $u_n(x)$ per un esponenziale immaginario $e^{-i\omega_n t}$ che è la parte oscillante (in funzione del

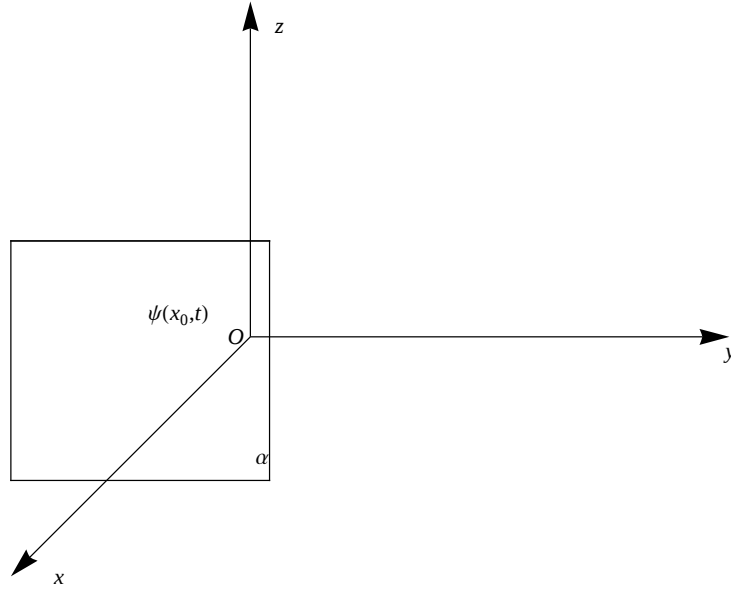


Figura 3: Su un piano α passante per $(x_0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ e perpendicolare all'asse x , il campo scalare ψ espresso dalla (12), dipende solo dal tempo t .

tempo) di singola componente. Ciò presenta un'analogia con le onde stazionarie che nel caso unidimensionale sono espresse da una funzione d'onda del tipo

$$\phi(x, t) = \sin kx \cos \omega_0 t, \quad (16)$$

essendo $k = 2\pi\lambda^{-1}$ il numero d'onde (λ è la lunghezza d'onda), mentre ω_0 è la pulsazione. Risulta poi $\omega_0 = ck$, in modo da soddisfare l'equazione di D'Alembert:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad (17)$$

Tale analogia suggerisce la seguente generalizzazione:

$$\phi(x, t) = u(x) e^{-i\omega_0 t}, \quad (18)$$

dove ω_0 è una frequenza angolare assegnata. È chiaro che se imponiamo che la (18) sia soluzione dell'equazione di D'Alembert otteniamo $u(x) = e^{\pm ikx}$, cioè il risultato precedente, onde assumiamo $u(x)$ non sinusoidale. Possiamo comunque tentare uno sviluppo in integrale di Fourier, e se $u(x)$ non è di quadrato sommabile ricorriamo alla teoria delle distribuzioni. Quindi

$$u(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}(k) e^{ikx} dk \quad (19)$$

con $\hat{u}(k)$ trasformata di Fourier della $u(x)$

$$\hat{u}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x) e^{-ikx} dx \quad (20)$$

Segue

$$\phi(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}(k) e^{i(kx - \omega_0 t)} dk, \quad (21)$$

che manifestamente *non* risolve l'equazione di D'Alembert, in quanto lo spettro delle frequenze non si distribuisce linearmente in funzione del numero d'onda. Più precisamente, la (18) è una sovrapposizione lineare di infinite onde piane monocromatiche *tutte* con la stessa frequenza ω_0 , ma con numeri d'onda $k \in (-\infty, +\infty)$ o comunque appartenenti a un opportuno intorno di un assegnato k_0 (dipendentemente dalla particolare densità spettrale $\hat{u}(k)$). Ciascuna componente è soluzione dell'equazione di D'Alembert, in quanto onde piane monocromatiche, con velocità di propagazione

$$c(k) = \frac{\omega_0}{k} \equiv v_f(k),$$

nota come *velocità di fase*. Notiamo che si presenta il caso patologico $v_f(0) \rightarrow \infty$, mentre nel caso di un pacchetto d'onde:

$$\phi(x, t) = \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} A(k) e^{i[kx - \omega(k)t]} dk, \quad (22)$$

non si pone, poichè si considerano esclusivamente modelli con $\omega(k)$ tali che $\omega(0) = 0$.

Definizione 4 Chiamiamo la (21) **onda stazionaria generalizzata**.

Dalla suddetta analisi segue che il termine *n-esimo* della serie a secondo membro della (12):

$$\psi_n(x, t) = u_n(x) e^{-i\omega_n t}, \quad (23)$$

descrive un'onda stazionaria generalizzata. La parte spaziale è:

$$u_n(x) = e^{-x \ln n},$$

per cui non è dotata di trasformata di Fourier. Sviluppiamo in serie di Mac Laurin:

$$u_n(x) = \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{(-1)^r}{r!} x^r (\ln n)^r \quad (24)$$

Dimostriamo la seguente proposizione:

Proposizione 5 La trasformata di Fourier della funzione potenza di esponente intero r :

$$f_r(x) = x^r, \quad (r \in \mathbb{N}), \quad (25)$$

è:

$$\hat{f}_r(k) = (-i)^r \frac{d^r}{dk^r} \delta(k), \quad (26)$$

essendo $\delta(k)$ la funzione delta di Dirac. In altri termini, la trasformata di Fourier di x^r non esiste come funzione, ma come distribuzione.

Dimostrazione. Partiamo dalla nota relazione

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} dx = 2\pi \delta(k), \quad (27)$$

cioè la trasformata di Fourier di $f_0(x) = 1$, come si deduce immediatamente riscrivendo:

$$\delta(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f_0(x) e^{-ikx} dx \quad (28)$$

Per $r \geq 1$

$$\hat{f}_r(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x^r e^{-ikx} dx \quad (29)$$

D'altra parte

$$\frac{d^r}{dk^r} e^{-ikx} = (-i)^r x^r e^{-ikx}$$

Ricavando $x^r e^{-ikx}$ e sostituendo nella (29):

$$\begin{aligned} \hat{f}_r(k) &= \frac{(-i)^r}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{d^r}{dk^r} e^{-ikx} \right) dx \\ &= \frac{(-i)^r}{2\pi} \frac{d^r}{dk^r} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} dx}_{=2\pi\delta(k)}, \end{aligned}$$

da cui l'asserto. ■

Osservazione 6 Dal lemma appena dimostrato segue lo sviluppo in integrale di Fourier della funzione x^r :

$$x^r = (-i)^r \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{d^r}{dk^r} \delta(k) \right] e^{ikx} dk \quad (30)$$

Se $g(\xi)$ è una funzione derivabile fino all'ordine r :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{d^r}{dk^r} \delta(\xi) \right] g(\xi) d\xi = g^{(r)}(0)$$

Pertanto la (30) diventa:

$$x^r = (-i)^r \underbrace{\left[\frac{d^r}{dk^r} e^{ikx} \right]_{k=0}}_{(-i)^r x^r} = x^r \quad (31)$$

Sostituendo la (30) nel termine r -esimo della serie a secondo membro della (24):

$$u_n(x) = \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{(-1)^r}{r!} (\ln n)^r (-i)^r \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{d^r}{dk^r} \delta(k) \right] e^{ikx} dk \quad (32)$$

In tal modo il termine n -esimo (13) della serie (12) può scriversi come:

$$\psi_n(x, t) = \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{(-1)^r}{r!} (\ln n)^r (-i)^r \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{d^r}{dk^r} \delta(k) \right] e^{i(kx - \omega_n t)} dk \quad (33)$$

E quindi la somma della serie:

$$\psi(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{(-1)^r}{r!} (\ln n)^r (-i)^r \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{d^r}{dk^r} \delta(k) \right] e^{i(kx - \omega_n t)} dk \quad (34)$$

La funzione integranda nell'integrale a secondo membro ha la forma:

$$A_r(k) e^{i(kx - \omega_n t)}, \quad \text{dove } A_r(k) = \frac{d^r}{dk^r} \delta(k), \quad (35)$$

per cui è un'onda piana monocromatica di numero d'onde k e pulsazione $\omega_n = \omega_0 \ln n$; ne consegue che la sua velocità di propagazione è

$$v_{f,n} = \frac{\omega_n}{k} = \frac{\omega_0}{k} \ln n \quad (36)$$

Conseguenza 7 La funzione zeta di Riemann (11) è una sovrapposizione lineare di infinite onde stazionarie generalizzate, la cui decomposizione spettrale è:

$$\zeta(x + it) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{(-1)^r}{r!} (\ln n)^r (-i)^r \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{d^r}{dk^r} \delta(k) \right] e^{i(kx - t \ln n)} dk \quad (37)$$

Riprendiamo la (12):

$$\psi(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) e^{-i\omega_n t} \quad (38)$$

Studiamone l'andamento sulla retta $r_0 : x = x_0 \neq 1$:

$$\psi_0(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \gamma_n e^{-i\omega_n t}, \quad (39)$$

dove

$$\gamma_n \stackrel{\text{def}}{=} u_n(x_0) = e^{-x_0 \ln n} \quad (40)$$

In base alla precedente interpretazione fisica, tale posizione equivale a determinare in funzione del tempo t , l'andamento del campo scalare $\psi(x, t)$ nei punti del piano $\alpha_0 : x = x_0$ passante per $(x_0, 0, 0)$ e perpendicolare all'asse x . Si noti che la (39) esibisce un'analogia "apparente" con la serie di Fourier di una funzione $f(t)$ periodica di periodo T verificante le condizioni di Dirichlet:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{-i\Omega_n t}, \quad c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) e^{i\Omega_n t}, \quad \Omega_n = \Omega_0 n = \frac{2n\pi}{T} \quad (41)$$

Si tratta di un'analogia apparente, poichè:

1. La serie (39) non è *bilatera*, i.e. non è estesa da $-\infty$ a $+\infty$.
2. Il sistema di funzioni $\{e^{-it \ln n}\}_{n \in \mathbb{N} - \{0\}}$ non è una base ortonormale dell'appropriato spazio funzionale.
3. La distribuzione delle frequenze è logaritmica

$$\omega_n = \omega_0 \ln n,$$

e quindi tale è la distribuzione dei periodi delle singole oscillazioni armoniche $e^{-i \ln n}$, a differenza della serie di Fourier in cui $\Omega_n = n\Omega_0$. Ciò implica che la parte reale (e/o la parte immaginaria) della somma parziale di ordine N

$$S_N(t) = \sum_{n=1}^N \gamma_n e^{-i\omega_n t}$$

non è una funzione periodica di t , e a maggior ragione non lo è nemmeno la parte reale (e/o la parte immaginaria) della somma della serie. Infatti, affinché una somma di N funzioni periodiche con periodi $T_1, \dots, T_N$ sia periodica è necessario e sufficiente che i periodi $T_1, \dots, T_N$ abbiano in comune un multiplo minimo. Ciò si verifica per la serie di Fourier giacché il periodo della n -esima armonica è $T_n = \frac{T}{n}$, ma non per la (39) dove $T_n = \frac{2\pi}{\ln n}$.

Nelle figg. 4-5-6-7 è riportato l'andamento di $\operatorname{Re} \psi_0(t)$ e $\operatorname{Im} \psi_0(t)$ per diversi valori di x_0 . Notiamo che tali funzioni hanno in comune alcuni zeri solo per $x_0 = \frac{1}{2}$, cioè sulla linea critica. Si osservi poi la singolarità in $t = 0$ di $\operatorname{Im} \psi(1, t)$, mentre $\operatorname{Re} \psi(1, t)$ è ivi regolare.

Per quanto precede, le funzioni $\operatorname{Re} \psi_0(t)$ e $\operatorname{Im} \psi_0(t)$ non sono periodiche, e sono definite in $(-\infty, +\infty)$ e hanno ivi parità definita (la prima $(+1)$, la seconda (-1)). Si tratta comunque di funzioni oscillanti che non si annullano all'infinito, giacché

$$\operatorname{Re} \psi_0(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \gamma_n \cos \omega_n t, \quad \operatorname{Im} \psi_0(t) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \gamma_n \sin \omega_n t, \quad (\gamma_n = e^{-x \ln n})$$

per cui non possono essere sviluppate in integrale di Fourier, se non nel senso delle distribuzioni. Infatti, tenendo conto che

$$e^{-i\omega_n t} = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - \omega_n) e^{-i\omega t} d\omega,$$

si ha

$$\psi_0(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \gamma_n \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - \omega_n) e^{-i\omega t} d\omega$$

Cioè

$$\zeta(x_0 + it) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-x_0 \ln n} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - \omega_0 \ln n) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (\omega_0 = 1 \text{ rad/s}),$$

da cui

$$\zeta(x_0 + it) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-x_0 \ln n} \delta(\omega - \omega_0 \ln n) e^{-i\omega t} d\omega,$$

per cui se $\mathcal{F}$ denota l'operatore che restituisce la trasformata di Fourier, si ha:

$$\mathcal{F}\zeta(x_0 + it) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-x_0 \ln n} \delta(\omega - \omega_0 \ln n),$$

cioè la densità spettrale di $\operatorname{Re} \zeta(x_0 + it)$ e $\operatorname{Im} \zeta(x_0 + it)$ è un pettine di Dirac. In particolare, sulla retta critica:

$$\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\ln \sqrt{n}} \delta(\omega - \omega_0 \ln n) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (\omega_0 = 1 \text{ rad/s}) \quad (42)$$

Da tale analisi emerge la seguente proprietà:

Conclusione 8 *Gli zeri non banali della funzione zeta di Riemann costituiscono un insieme al più infinito numerabile.*

Infatti, dalle espressioni trovate vediamo che la zeta si esprime come somma di una serie il cui termine n -esimo è il prodotto di un esponenziale reale per un esponenziale immaginario. Entrambi non si annullano per alcun valore della variabile indipendente, mentre l'esponenziale immaginario è oscillante, per cui parte reale e parte immaginaria della serie hanno un insieme numerabile di zeri:

$$H(x_0) = \{\tau_k \in \mathbb{R} \mid \operatorname{Re} \zeta(x_0 + i\tau_k) = 0\}, \quad K(x_0) = \{\tau_k \in \mathbb{R} \mid \operatorname{Im} \zeta(x_0 + i\tau_k) = 0\}$$

Ne consegue che una possibile strategia di attacco per dimostrare la congettura di Riemann, consiste nel provare:

$$H(x_0) \cap K(x_0) \neq \emptyset \iff x_0 = \frac{1}{2} \quad (43)$$

Ciò può essere fatto osservando che lo spettro delle frequenze è a meno del fattore $e^{-x_0 \ln n}$ indipendente da x_0 .

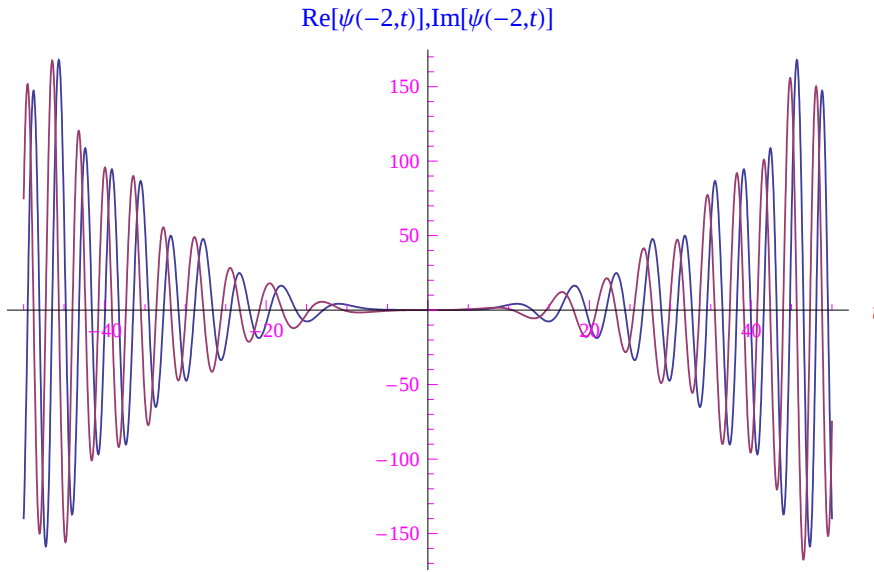


Figura 4: Andamento di $\operatorname{Re}[\psi(-2, t)]$ e $\operatorname{Im}[\psi(-2, t)]$.

Scriviamo:

$$\psi(x_0, t) = \zeta(x_0 + it) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-x_0 \ln n} e^{-it \ln n}, \quad \forall x_0 \in \mathbb{R} - \{1\}, \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (44)$$

Sviluppando l'esponenziale immaginario con la formula di Eulero:

$$\begin{aligned} \psi(x_0, t) &= \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-x_0 \ln n} [\cos(t \ln n) - i \sin(t \ln n)] \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N e^{-x_0 \ln n} [\cos(t \ln n) - i \sin(t \ln n)] \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N e^{-x_0 \ln n} \cos(t \ln n) - i \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N e^{-x_0 \ln n} \sin(t \ln n) \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \varphi_1(x_0, t) + i\varphi_2(x_0, t) \end{aligned}$$

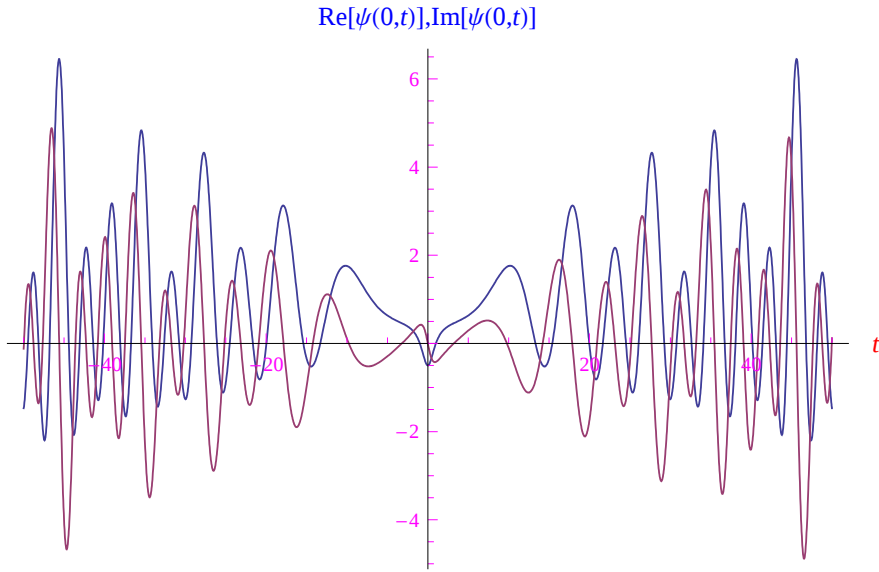


Figura 5: Andamento di $\text{Re} [\psi (0, t)]$ e $\text{Im} [\psi (0, t)]$.

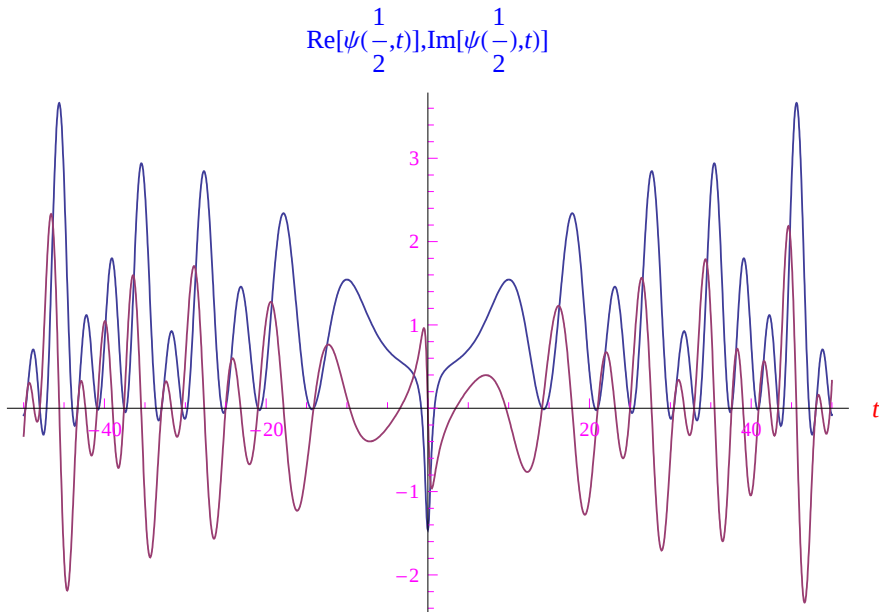
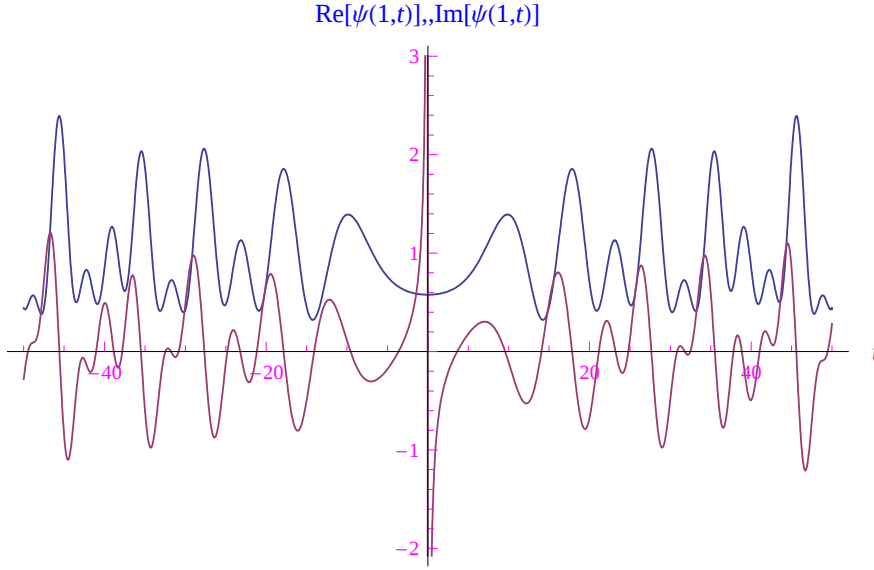


Figura 6: Andamento di $\text{Re} [\psi (\frac{1}{2}, t)]$ e $\text{Im} [\psi (\frac{1}{2}, t)]$.


 Figura 7: Andamento di $\text{Re} [\psi (1, t)]$ e $\text{Im} [\psi (1, t)]$.

Cioè

$$\varphi_1 (x_0, t) = \text{Re} \zeta (x_0 + it) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-x_0 \ln n} \cos (t \ln n) \quad (45)$$

$$\varphi_2 (x_0, t) = \text{Im} \zeta (x_0 + it) = - \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-x_0 \ln n} \sin (t \ln n)$$

Segue

$$\varphi_1 (x_0, t) = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} e^{-x_0 \ln n} \cos (t \ln n) \quad (46)$$

$$\varphi_2 (x_0, t) = - \sum_{n=2}^{+\infty} e^{-x_0 \ln n} \sin (t \ln n) ,$$

per cui

$$\lim_{x_0 \rightarrow +\infty} \varphi_1 (x_0, t) = -1, \quad \lim_{x_0 \rightarrow +\infty} \varphi_2 (x_0, t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (47)$$

Tenendo conto delle (46) possiamo formulare la seguente condizione per l'esistenza degli zeri non banali della funzione zeta:

$$\rho = x_0 + i\tau \text{ con } \tau \neq 0 \mid \zeta (\rho) = 0 \iff \begin{cases} \sum_{n=2}^{+\infty} e^{-x_0 \ln n} \cos (\tau \ln n) = -1 \\ \sum_{n=2}^{+\infty} e^{-x_0 \ln n} \sin (\tau \ln n) = 0 \end{cases} \quad (48)$$

Eseguendo il cambio di variabile

$$\xi_n = \ln n, \quad (n = 2, 3, \dots) \quad (49)$$

le (48) diventano

$$\begin{cases} \sum_{n=2}^{+\infty} e^{-x_0 \xi_n} \cos(\tau \xi_n) = -1 \\ \sum_{n=2}^{+\infty} e^{-x_0 \xi_n} \sin(\tau \xi_n) = 0 \end{cases}, \quad (50)$$

che sono particolari somme integrali relative alle funzioni

$$f(\xi) = e^{-x_0 \xi} \cos(\tau \ln n), \quad g(\xi) = e^{-x_0 \xi} \sin(\tau \xi_n), \quad (51)$$

e all'intervallo illimitato $X = [\ln 2, +\infty)$. Più precisamente, si esegue una decomposizione $\mathcal{D}(X)$ attraverso i punti:

$$\ln 2 = \xi_2 < \xi_3 < \dots < \xi_n < \dots \quad (52)$$

cosicché

$$[\ln 2, +\infty) = \bigcup_{n=2}^{+\infty} [\xi_n, \xi_{n+1}],$$

dove l'ampiezza dei singoli intervalli parziali è pari a 1:

$$\xi_{n+1} - \xi_n = 1, \quad \forall n \in \{2, 3, \dots\} \quad (53)$$

Definizione 9 Le (52)-(53) definiscono una **decomposizione unitaria** dell'intervallo X , che denotiamo con $\mathcal{D}_u$.

In tal modo, le (50) si riscrivono:

$$\begin{cases} \sum_{n=2}^{+\infty} e^{-x_0 \xi_n} \cos(\tau \xi_n) \underbrace{(\xi_{n+1} - \xi_n)}_{=1} = -1 \\ \sum_{n=2}^{+\infty} e^{-x_0 \xi_n} \sin(\tau \xi_n) \underbrace{(\xi_{n+1} - \xi_n)}_{=1} = 0 \end{cases}, \quad (54)$$

Per quanto precede, i primi membri delle (54) sono somme integrali relative alle funzioni (51), per cui scriviamo:

$$\begin{aligned} \sigma_{\mathcal{D}_u} &= \sum_{n=2}^{+\infty} f(\xi_n) (\xi_{n+1} - \xi_n) = -1 \\ \sigma'_{\mathcal{D}_u} &= \sum_{n=2}^{+\infty} g(\xi_n) (\xi_{n+1} - \xi_n) = 0 \end{aligned} \quad (55)$$

3 Sottovarietà regolari

Definizione 10 Assegnato un aperto $A \subset \mathbb{R}^N$, e un intero $l \in \{1, 2, \dots, N-1\}$, si consideri la funzione vettoriale:

$$\begin{aligned} \mathbf{f} : A &\rightarrow \mathbb{R}^{N-l} \\ \mathbf{f} : \mathbf{x} \in A &\rightarrow \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in A \end{aligned} \quad (56)$$

Cioè

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_{N-l}(\mathbf{x})) \quad (57)$$

la cui matrice jacobiana è

$$J(x_1, \dots, x_N) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right), \quad (i = 1, \dots, N-l, j = 1, \dots, N) \quad (58)$$

Se $\mathbf{f} \in C^{k \geq 2}(A)$ i.e. $f_i \in C^{k \geq 2}(A)$ per $i = 1, 2, \dots, N-l$ e $\text{rank}(J) = N-l$, l'insieme di livello zero della (56)

$$V = \{\mathbf{x} \in A \mid \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\} \quad (59)$$

Si dice **sottovarietà regolare** di $\mathbf{R}^N$ di dimensione l e si scrive $\dim V = l$.

Esempio 11 Consideriamo il caso speciale $N = 3, l = 1$, onde $A \subset \mathbb{R}^3$ e

$$\mathbf{f}(x, y, z) = (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z)), \quad (60)$$

la cui matrice jacobiana si scrive:

$$J(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (61)$$

Se $f_i \in C^{k \geq 2}(A)$ e $\text{rank}(J) = 2$, l'insieme

$$V : \begin{cases} f_1(x, y, z) = 0 \\ f_2(x, y, z) = 0 \end{cases}, \quad (62)$$

è una sottovarietà regolare di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 1. Come è noto, il luogo (62) è una curva regolare di $\mathbb{R}^3$. Supponiamo che sia

$$f_1(x, y, z) = z - \sqrt{x^2 + y^2}, \quad f_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 \quad (63)$$

Segue la matrice jacobiana

$$J(x, y, z) = \begin{pmatrix} -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} & 1 \\ \frac{x}{2x} & \frac{y}{2y} & 2z \end{pmatrix} \quad (64)$$

e il luogo (62):

$$\begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2} \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \quad (65)$$

Cioè la circonferenza

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (66)$$

Scriviamo

$$\zeta(x + it) = \varphi(x, t) + i\chi(x, t)$$

Per quanto visto in precedenza:

$$\begin{aligned}\varphi(x, t) &= 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} e^{-x\omega_n} \cos \omega_n t \\ \chi(x, t) &= - \sum_{n=2}^{+\infty} e^{-x\omega_n} \sin \omega_n t,\end{aligned}$$

ricordando che $\omega_n = \ln n$. Gli zeri non banali della funzione zeta sono individuati dalle coppie ordinate di numeri reali $(x, t \neq 0)$ tali che

$$\begin{cases} \varphi(x, t) = 0 \\ \chi(x, t) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \sum_{n=2}^{+\infty} e^{-x\omega_n} \cos \omega_n t = -1 \\ \sum_{n=2}^{+\infty} e^{-x\omega_n} \sin \omega_n t = 0 \end{cases} \quad (67)$$

Derivando rispetto a x primo e secondo membro della prima equazione:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (-1) \omega_n e^{-x\omega_n} \cos \omega_n t = 0$$

Derivando fino a un ordine p fissato ad arbitrio:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^p \omega_n^p e^{-x\omega_n} \cos \omega_n t = 0, \quad \forall p \in \mathbb{N} - \{0\}$$

Procedendo in maniera analoga per la seconda delle (67):

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^q \omega_n^q e^{-x\omega_n} \sin \omega_n t = 0, \quad \forall q \in \mathbb{N}$$

In definitiva gli zeri della funzione zeta devono verificare la condizione:

$$\zeta(x + it) = 0 \iff \begin{cases} \sum_{n=2}^{+\infty} e^{-x\omega_n} \cos \omega_n t = -1 \\ \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^p \omega_n^p e^{-x\omega_n} \cos \omega_n t = 0, \quad \forall p \in \mathbb{N} - \{0\}, \quad \forall q \in \mathbb{N} \\ \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^q \omega_n^q e^{-x\omega_n} \sin \omega_n t = 0 \end{cases}$$

Definiamo le funzioni reali della variabile reale $\omega \in \Omega = [\ln 2, +\infty)$

$$f(\omega) = e^{-x\omega} \cos \omega t, \quad g(\omega) = e^{-x\omega} \sin \omega t \quad (68)$$

I punti $\omega_n = \ln n$ dell'asse reale ω , individuano una partizione logaritmica dell'intervallo Ω :

$$\omega_2 = \ln 2 < \omega_3 = \ln 3 < \dots < \omega_n = \ln n < \dots, \quad (69)$$

avendosi

$$\Omega = \lim_{N \rightarrow +\infty} \bigcup_{n=2}^N [\omega_n, \omega_{n+1}] \quad (70)$$

Riferimenti bibliografici

- [1] Edwards H.M.: *Riemann's Zeta Function*, Academic Press, New York 1974.