# Appunti di statistica

**Ing. Giorgio Bertucelli**

## 1 Distribuzione normale bidimensionale

Questa distribuzione è particolarmente importante

$$d\varphi\left(t,u\right)dtdu=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{1-\rho^2}\left[\frac{\left(t-\mu_x\right)^2}{2\sigma_x^2}-\rho\frac{\left(t-\mu_x\right)\left(u-\mu_y\right)}{\sigma_x\sigma_y}+\frac{\left(u-\mu_y\right)^2}{2\sigma_y^2}\right]\right\}$$

Se ne verifica la sua legittimità dimostrando che

$$\iint_{\mathbb{R}^2}\varphi\left(t,u\right)dtdu=1 \tag{1}$$

Si ponga una prima trasformazione di variabile:

$$\begin{aligned}\frac{\left(t-\mu_x\right)^2}{2\sigma_x^2}&=t'^2\Longrightarrow\frac{t-\mu_x}{\sqrt{2}\sigma_x}=t'\\ \frac{\left(u-\mu_y\right)^2}{2\sigma_x^2}&=u'^2\Longrightarrow\frac{u-\mu_y}{\sqrt{2}\sigma_x}=u'\end{aligned} \tag{2}$$

da cui

$$\left\{\begin{array}{l}t=\sqrt{2}\sigma_xt'+\mu_x\Longrightarrow dt=\sqrt{2}\sigma_xdt'\\ u=\sqrt{2}\sigma_yu'+\mu_y\Longrightarrow du=\sqrt{2}\sigma_ydu'\end{array}\right. \tag{3}$$

Si ponga una seconda trasformazione di variabile:

$$\begin{aligned}t'&=\frac{v-\omega}{\sqrt{2}}\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l}\frac{dt'}{dv}=\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{dt'}{d\omega}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{array}\right.\\ u'&=\frac{v+\omega}{\sqrt{2}}\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l}\frac{du'}{dv}=\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{du'}{d\omega}=\frac{1}{\sqrt{2}}\end{array}\right.\end{aligned} \tag{4}$$

Lo jacobiano della seconda trasformazione è

$$J=\left|\begin{array}{cc}\frac{dt'}{dv}&\frac{dt'}{d\omega}\\ \frac{du'}{dv}&\frac{du'}{d\omega}\end{array}\right|=\left|\begin{array}{cc}\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{array}\right|=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

Ne segue

$$\begin{aligned}t'-2\rho t'u'+u'^2&=\frac{\left(u-\omega\right)^2}{2}-2\rho\frac{v-\omega}{\sqrt{2}}\cdot\frac{v+\omega}{\sqrt{2}}+\frac{\left(v+\omega\right)^2}{2}\\ &=v^2\left(1-\rho\right)+\omega^2\left(1+\rho\right)\end{aligned}$$

Finalmente

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbb{R}^2}\varphi\left(t,u\right)dtdu&=\frac{1}{\pi\sqrt{1-\rho^2}}\iint_{\mathbb{R}^2}e^{-\frac{1}{1-\rho^2}\left[v^2(1-\rho)+\omega^2(1+\rho)\right]}dvd\omega\\ &=\frac{1}{\pi}\iint_{\mathbb{R}^2}e^{-\left(\frac{v^2}{1+\rho}+\frac{\omega^2}{1-\rho}\right)}\frac{dv}{\sqrt{1+\rho}}\frac{d\omega}{\sqrt{1-\rho}}=\frac{\pi}{\pi}=1\end{aligned} \tag{5}$$