Appunti di statistica

Ing. Giorgio Bertucelli

1 Distribuzioni marginali e condizionate

1.1 Densità in funzione di costante indeterminata

Si abbia la funzione

$$\varphi(x, y) = cy(1 - x), \quad \text{dove } 0 \le x \le 1, \;\; 0 \le y \le x \tag{1}$$

Si può assumere che tale funzione come densità di probabilità a condizione che sia

$$\int_0^1 \int_0^x cy(1 - x)\, dxdy = 1 \tag{2}$$

Ignorando momentaneamente la c, risulta

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^x y(1 - x)\, dxdy &= \int_0^1 (1 - x)\, dx \int_0^x ydy = \int_0^1 \frac{x^2}{2}(1 - x)\, dx \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{24} \end{aligned} \tag{3}$$

Dunque dovrà essere $c = 24$. Osservando che per un dato y i valori di x ammissibili sono quelli soddisfacenti la condizione $y \le x \le 1$, le **densità di probabilità marginale** saranno

$$\begin{cases} \varphi_y(x) = \int_0^x 24y(1 - x)\, dy = 24(1 - x)\int_0^x ydy = 12x^2(1 - x) \\ \varphi_x(x) = \int_y^1 24y(1 - x)\, dy = 24y\int_0^x (1 - x)\, dy = \ldots = 12y(1 - y)^2 \end{cases} \tag{4}$$

Le **distribuzioni condizionate** risultano quindi

$$\begin{array}{l} \varphi(x, (y)) = \frac{24y(1-x)}{12y(1-y^2)} \quad \text{dove } y \le x \le 1 \\ \varphi((x), y) = \frac{24y(1-x)}{12x^2(1-x)} \quad \text{dove } 0 \le y \le x \end{array} \tag{5}$$