"Funzioni di variabile aleatorie"

Esempio 3.21

La velocità v di una molecola di massa m in un gas a temperatura costante è una variabile aleatoria la cui distribuzione è data dalla legge di Maxwell-Boltzmann

(1) $$\varphi(v)dv = \alpha v^2 e^{-\beta v^2} dv$$ dove α e β sono costanti

L'energia E di una molecola $E = \frac{1}{2}mv^2$ in quanto funzione della velocità è anch'essa una variabile aleatoria.

(2) $$\frac{dE}{dv} = mv$$

(3) Poniamo $\gamma = \frac{1}{2}m$ Risulta allora: $v = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\sqrt{E} \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dE} = \frac{1}{2\sqrt{\gamma}\sqrt{E}}$

Sarà dunque:

(4) $$\psi(E)dE = \alpha\frac{E}{\gamma}e^{-\frac{\beta}{\gamma E}}\frac{dE}{dv} = \alpha\frac{E}{\gamma}e^{-\frac{\beta}{\gamma E}}\frac{1}{2\sqrt{\gamma}\sqrt{E}} = \frac{1}{2}\alpha\frac{\sqrt{E}}{\gamma^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{\beta}{\gamma E}}dE$$

Sarà utile ricordare - vedasi precedente esercizio - che la funzione $E = f(v)$ deve essere ***monotona*** nell'intervallo di definizione della v per poter applicare la formula:

(5) $$\varphi(v)dv = \varphi(v(E))\left|\frac{dv}{dE}\right|dv = \psi(E)dE$$