Università di Bologna – ***Analisi Statistica***

"Funzioni di variabile aleatorie"

Diamo alcune definizioni:

$x =$ variabile aleatoria continua $\Rightarrow$ $\varphi(x) =$ densità di probabilità $\Rightarrow$ $\Phi(x) =$ funzione di distribuzione

$y = f(x)$ = quindi funzione aleatoria derivabile e monotona, crescente o decrescente,

nell'intervallo di definizione della x. $\Rightarrow$ $\psi(y) =$ densità di probabilità $\Rightarrow$ $\Psi(y) =$ funzione di distribuzione

Nel caso in cui $x =$ variabile discreta e finita con valori x_i con $i = 1, 2, \ldots, m$ cui compete la distribuzione di probabilità $p_1, p_2, \ldots, p_m$ e $\sum_1^m p_i = 1$ corrisponderanno i valori $y_i = f(x_i)$ con $i = 1, 2, \ldots, m$ cui compete la stessa distribuzione di probabilità $p_1, p_2, \ldots, p_m$.

(1)
$$\begin{cases} \Phi(x) = p(t \le x) = p(u = f(t) \le y = f(x)) = \Psi(y) & \text{con } \dfrac{df}{dx} > 0 \\ \Phi(x) = p(t \le x) = p(u = f(t) \le y = f(x)) = 1 - \Psi(y) & \text{con } \dfrac{df}{dx} < 0 \end{cases}$$

(2)
$$\begin{cases} d\Phi(x) = \varphi(x)dx = \varphi(x(y))\dfrac{dx}{dy}dy = d\Psi(y) \\ d\Phi(x) = \varphi(x)dx = \varphi(x(y))\dfrac{dx}{dy}dy = -d\Psi(y) \end{cases}$$

Osserviamo che $\dfrac{dx}{dy} = \left(\dfrac{df}{dx}\right)^{-1}$ e possiamo porre $\dfrac{dx}{dy} = -\left|\dfrac{dx}{dy}\right|$ da ciò deriva che

(3)
$$\varphi(x)dx = \varphi(x(y))\left|\frac{dx}{dy}\right|dy = d\Psi(y) = \psi(y)dy \qquad \text{valida per f(x) crescente e decrescente}$$

Né poteva essere diversamente, perché $\psi(y) =$ densità di probabilità è essenzialmente positiva.

Esempio 3.20

Siano $\varphi(x) = e^{-x}$ con $0 \le x \le \infty$ e $y = \sqrt{x}$

Avremo:

(4)
$$\psi(y) = e^{-y^2}\frac{d\left(x = y^2\right)}{dy} = e^{-y^2}2y \qquad \text{con} \quad 0 \le y \le \infty$$

(5)
$$\int_0^\infty \psi(y)dy = \int_0^\infty e^{-y^2}2ydy = \int_0^\infty e^{-y^2}d\left(y^2\right) = 1$$