"Distribuzioni marginali e condizionate"

Esempio 3.18 - Distribuzione normale bidimensionale

Questa distribuzione è particolarmente importante negli studi di statistica:

(1) $$\varphi(t,u)\,dtdu = d\Phi = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}}\, e^{-\frac{1}{1-\rho^2}\left[\frac{(t-\mu_x)^2}{2\sigma_x^{\,2}}-\rho\frac{(t-\mu_x)(u-\mu_y)}{\sigma_x\sigma_y}+\frac{(u-\mu_y)^2}{2\sigma_y^{\,2}}\right]}dtdu \qquad -\infty\le x\le+\infty \qquad -\infty\le y\le+\infty$$

Se ne verifica la sua legittimità dimostrando che:

(2) $$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t,u)\,dtdu = 1$$

Si ponga una prima trasformazione di variabile:

(3) $$\frac{(t-\mu_x)^2}{2\sigma_x^{\,2}} = t'^2 \quad\Rightarrow\quad \frac{t-\mu_x}{\sqrt{2}\sigma_x} = t' \qquad \text{e} \qquad \frac{(u-\mu_y)^2}{2\sigma_y^{\,2}} = u'^2 \quad\Rightarrow\quad \frac{u-\mu_y}{\sqrt{2}\sigma_y} = u'$$

(4) $$\begin{cases} t = \sqrt{2}\sigma_x t' + \mu_x & \Rightarrow \quad dt = \sqrt{2}\sigma_x dt' \\ u = \sqrt{2}\sigma_y u' + \mu_y & \Rightarrow \quad du = \sqrt{2}\sigma_y du' \end{cases}$$

Si ponga una seconda trasformazione di variabile:

(5) $$t' = \frac{v-\omega}{\sqrt{2}} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} \dfrac{dt'}{dv} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{dt'}{d\omega} = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} \end{cases} \qquad u' = \frac{v+\omega}{\sqrt{2}} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} \dfrac{du'}{dv} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{du'}{d\omega} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Lo jacobiano della seconda trasformazione è:

(6) $$J = \begin{vmatrix} \dfrac{dt'}{dv} & \dfrac{dt'}{d\omega} \\ \dfrac{du'}{dv} & \dfrac{du'}{d\omega} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{-1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1$$

Di conseguenza l'esponente della (1) si modifica così:

(7) $$t'^2 - 2\rho t'u' + u'^2 = \frac{(v-\omega)^2}{2} - 2\rho\frac{v-\omega}{\sqrt{2}}\cdot\frac{v+\omega}{\sqrt{2}} + \frac{(v+\omega)^2}{2} = v^2(1-\rho) + \omega^2(1+\rho)$$

Quindi la (2) diventa:

(8) $$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t,u)\,dtdu = \frac{1}{\pi\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{1-\rho^2}\left[v^2(1-\rho)+\omega^2(1+\rho)\right]}dvd\omega = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{v^2}{1+\rho}+\frac{\omega^2}{1-\rho}\right)}\frac{dv}{\sqrt{1+\rho}}\frac{d\omega}{\sqrt{1-\rho}} = \frac{\pi}{\pi} = 1$$

Si cerchi ora la ***Distribuzione marginale per x.***

Modifichiamo l'esponenziale aggiungendo e togliendo $\rho^2 t'^2$:

(9) $$\frac{1}{1-\rho^2}\left[t'^2-2\rho t'u'+u'^2+\rho^2t'^2-\rho^2t'^2\right]=\frac{1}{1-\rho^2}\left(u'-\rho t'\right)^2+\frac{1}{1-\rho^2}\left[t'^2\left(1-\rho^2\right)\right]=t'^2+\frac{1}{1-\rho^2}\left(u'-\rho t'\right)^2$$

Al fine di calcolare la distribuzione marginale, per un determinato t', che si deve considerare fisso, dobbiamo far variare $-\infty \le u' \le +\infty$; se si pone quindi

(10 $$\xi = u'-\rho t' \quad \Rightarrow \quad d\xi = du'$$ essendo $t' =$ cost. Ne segue che:

(11) $$\varphi_u\left(t'\right)=\frac{1}{\pi\sqrt{1-\rho^2}}e^{-t'^2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{\xi^2}{1-\rho^2}}d\xi_y=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-t'^2}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{\xi^2}{1-\rho^2}}\frac{d\xi_y}{\sqrt{1-\rho^2}}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-t'^2}$$ e ritornando alla t

(12) $$\varphi_u\left(t\right)dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}e^{-\frac{\left(t-\mu_x\right)^2}{2\sigma_x^2}}dt$$ Le due distribuzioni marginali risultano quindi:

(13) $$\begin{cases}\varphi_u\left(t\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}e^{-\frac{\left(t-\mu_x\right)^2}{2\sigma_x^2}}\\[2ex]\varphi_t\left(u\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y}e^{-\frac{\left(u-\mu_y\right)^2}{2\sigma_y^2}}\end{cases}$$

Passiamo alla determinazione delle ***distribuzioni condizionate.*** Ci proponiamo di trovare la probabilità condizionata $\varphi\left((u);t\right)dt$ che $t \le x \le t+dt$ se $u \le y \le u+du$. Si deve determinare la funzione

(14) $$\varphi\left((u);t\right)=\frac{\varphi\left(t,u\right)}{\varphi_t\left(u\right)}$$ dunque ricordando a (1) e la (13) si ha:

(15) $$\varphi\left((u);t\right)=\frac{\dfrac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{1-\rho^2}\left[\frac{\left(t-\mu_x\right)^2}{2\sigma_x^2}-\rho\frac{\left(t-\mu_x\right)\left(u-\mu_y\right)}{\sigma_x\sigma_y}+\frac{\left(u-\mu_y\right)^2}{2\sigma_y^2}\right]}}{\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y}e^{-\frac{\left(u-\mu_y\right)^2}{2\sigma_y^2}}}=\frac{e^{-\frac{1}{1-\rho^2}\left[\frac{\left(t-\mu_x\right)^2}{2\sigma_x^2}-2\rho\frac{\left(t-\mu_x\right)\left(u-\mu_y\right)}{2\sigma_x\sigma_y}+\rho^2\frac{\left(u-\mu_y\right)^2}{2\sigma_y^2}\right]}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}\sigma_x}=$$

$$=\frac{e^{-\frac{1}{1-\rho^2}\left[\frac{\left(t-\mu_x\right)}{\sqrt{2}\sigma_x}-\rho\frac{\left(u-\mu_y\right)^2}{\sqrt{2}\sigma_y}\right]^2}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}\sigma_x}=\frac{e^{-\frac{1}{1-\rho^2}\left[\frac{t-\mu_x-\rho\left(\sigma_x/\sigma_y\right)\left(u-\mu_y\right)}{\sqrt{2}\sigma_x}\right]^2}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}\sigma_x}$$

Pertanto la distribuzione condizionata $\varphi\left((u);t\right)$ risulta ancora una distribuzione normale con parametri

(16) $$\begin{cases}\sigma_x\sqrt{1-\rho^2} & \text{in luogo di } \sigma_x\\[1ex]\mu_x-\rho\dfrac{\sigma_x}{\sigma_y}\left(u-\mu_y\right) & \text{in luogo } \mu_x\end{cases}$$

Analogo calcolo può effettuarsi per $\varphi\left(u;(t)\right)$, ottenendo:

(17) $$\begin{cases}\sigma_y\sqrt{1-\rho^2} & \text{in luogo di } \sigma_y\\[1ex]\mu_y-\rho\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}\left(t-\mu_x\right) & \text{in luogo } \mu_y\end{cases}$$