"Funzione di distribuzione"

Esempio 3.14 - Determinazione di costante indeterminata

Tale argomento è già stato affrontato in un precedente esercizio riguardante distribuzioni discrete.

La condizione di normalizzazione:

(1) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx = 1$$

consente di determinare il valore di una costante indeterminata che appaia nell'espressione della densità di probabilità. Si prenda per esempio la distribuzione delle velocità di Maxwell:

(2) $\varphi(x<0)=0 \quad \Rightarrow \quad \varphi(x) = ax^2 e^{-\beta x^2}$ per $0 \le x \le \infty$ essendo β assegnata.

La condizione di normalizzazione consente di determinare la costante a. Risulta:

(3) $$\int_0^{+\infty} \varphi(x)dx = a\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\beta x^2} dx = a\left[-\frac{x}{2\beta}e^{-\beta x^2}\right]_0^{\infty} + \frac{a}{2\beta}\int_0^{+\infty} e^{-\beta x^2}dx = \frac{a}{2\beta\sqrt{\beta}}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$$

avendo posto $t = \sqrt{\beta}x$. Sarà quindi:

(4) $$\frac{a}{2\beta\sqrt{\beta}}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{a}{2\beta^{3/2}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\beta^{3/2}$$